Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.1 : Definiciones y Terminología

- **Ecuación Diferencial:** Es una ecuación que contiene derivadas

- **Ecuación Diferencial Ordinaria:** Es una ecuación que contiene derivadas ordinarias. Se representa simbólicamente como $F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$. Algunas veces se les designa como EDO. Las EDO's se usan para modelar fenómenos que relacionen alguna función de una variable, $y = f(x)$, con sus razones de cambio y', y'', y''', etc .

- **Ecuación Diferencial Parcial:** Es una ecuación que contiene derivadas parciales. Se representa simbólicamente como $F(x, y, t, f(x, y, t), f_x, f_y, f_t, f_{xx}, f_{yy}, f_{tt}, \ldots) = 0$. Algunas veces se les designa como EDP. Las EDP's se usan para modelar fenómenos que relacionen alguna función de varias variables, $w = f(x, y, t)$, con sus razones de cambio, f_x, f_y, f_t, etc. Las EDP's se estudian en un curso posterior a este. En este curso solo estudiaremos EDO's. Por eso les llamaremos simplemente ED's.

- **Orden de una ED:** El orden de una ED lo determina la derivada de mayor orden que esté presente. Una EDO de orden "n" se representa simbólicamente como: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

- **Ecuación Diferencial Lineal de Orden "n"**, es una ED que tiene la forma estándar:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\cdot y = g(x)$$

- De esta forma estándar se puede ver que para que una ED sea Lineal se requiere que:

a) todos los coeficientes $a_k(x)$ y el término del lado derecho g(x) deben ser funciones de la variable x únicamente, y

b) las potencias de y, y', y'', ... , $y^{(n)}$, deben ser primeras potencias, esto es, términos con exponente igual a la unidad.

- Cuando el término $g(x) \neq 0$, la ED Lineal se llama "No Homogénea", abreviándose EDLN-H, y cuando $g(x) = 0$, la ED Lineal se llama "Homogénea", abreviándose EDLH. Y cuando los coeficientes $a_k(x)$, son todos constantes y $g(x) = 0$, la ED se llama Lineal Homogénea de Coeficientes Constantes, abreviándose EDLHCC.

- La ED de primer orden puede escribirse como: $F(x, y, y') = 0$. Cuando puede despejarse y', lo cual ocurre frecuentemente, se acostumbra escribir ya sea como: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$, o bien como $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Ambas formas son equivalentes ya que podemos escribirlas como: $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$

$F(x, y, y') = 0$	$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Ejemplos para la clase: Establezca si la ED es lineal o no lineal, e indique el orden de la ecuación.

$E1: \quad xy''' - (y')^4 + y = 0$	$R1: \quad No\ Lineal\ ; tercer\ orden$
$E2: \quad udv + (v + uv - ue^u)du = 0$	$R2: \quad Lineal\ \ para\ \frac{dv}{du}; \ primer\ orden$
$E3: \quad t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$	$R3: \quad Lineal\ ; cuarto\ orden$
$E4: \quad \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$	$R4: \quad No\ Lineal\ ; segundo\ orden$

- **Solución de una ED**. Cualquier función $y = f(x)$, definida en un intervalo (a,b), que reduce la ED a una identidad cuando se sustituye en la ED, se llama una solución explícita de la ED en ese intervalo. Una relación G(x,y)=0 se llama una solución implícita de la ED en un intervalo (a,b) si existe una función $y = f(x)$ que satisface tanto esta relación como la ED.

Ecuación Diferencial	Solución Implícita	Familia de curvas solución	Constantes arbitrarias
$F(x, y, y') = 0$	$G(x, y, c_1) = 0$	uniparamétrica	1
$F(x, y, y', y'') = 0$	$G(x, y, c_1, c_2) = 0$	biparamétrica	2
$F(x, y, y', y'', y''') = 0$	$G(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0$	triparamétrica	3
$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$	$G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$	ene-paramétrica	n

- Solución particular de una ED. Una solución de una ED que no contiene constantes arbitrarias se llama una solución particular.

- Solución general de una ED de orden "n". Una solución n-paramétrica de una ED de orden "n" en un intervalo (a,b), que contiene todas las posibles soluciones particulares de la ED, se llama la solución general de la ED.

Ejemplos para la clase: Verifique si la función indicada es una solución de la ED dada:

$$E1: \quad 2y' + y = 0 \quad ; \quad y = e^{-x/2}$$

$$E2: \quad \frac{dX}{dt} = (X-1)(1-2X) \quad ; \quad \ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t$$

$$E3: \quad P' = P(1-P) \quad ; \quad P = \frac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}$$

$$E4: \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad ; \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 2	Zill/Wright - 3	Definiciones y Terminología
Zill/Cullen - 13	Zill/Wright - 11	Problemas de Valor Inicial

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 2 : Definiciones y Terminología

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No 2: Definiciones y Terminología

En los siguientes problemas determine el orden de la ED dada y diga si es lineal o no lineal.

$$P1: \quad (1-x^2)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$$

$$P2: \quad yy' + 2y = 1 + x^2$$

$$P3: \quad x^3 y^{(4)} - x^2 y'' + 4xy' - 3y = 0$$

$$P4: \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

En los siguientes problemas verifique que la función, o funciones que se dan, son solución de la ED

$$P5: \quad \frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x} \quad ; \quad y = e^{3x} + 10e^{2x}$$

$$P6: \quad y' + y = senx \quad ; \quad y = \frac{1}{2}senx - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$$

$$P7: \quad y' - \frac{1}{x}y = 1 \quad ; \quad y = x\ln x \quad ; x > 0$$

$$P8: \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \quad ; \quad y = c_1 + c_2 x^{-1} \quad ; \quad x > 0$$

$$P9: \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad ; \quad y = x^2 + x^2 \ln x \quad ; \quad x > 0$$

$$P10: x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 12x^2$$

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^{-1} + 4x^2$$

$$R1: \quad Lineal\,;\, segundo\, orden$$

$$R2: \quad No\ Lineal\,;\, primer\, orden$$

$$R3: \quad Lineal\,;\, cuarto\, orden$$

$$R4: \quad NoLineal\,;\, segundo\, orden$$