Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.2 : Problemas de Valor Inicial

• **Problema de Valor Inicial de orden "n":** Consiste de una ED de orden "n", y de n condiciones iniciales, las cuales pueden usarse para determinar una solución particular a partir de la solución general n-paramétrica, resolviendo un sistema de "n" ecuaciones simultáneas. Ejemplos:

PVI de 1er orden	PVI de 2º orden	PVI de 3er orden
$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$	$\frac{d^3y}{dx^3} = f(x,y,y',y'')$
$y(x_0) = y_0$	$y(x_0) = y_0$	$y(x_0) = y_0$
	$y'(x_o) = y_1$	$y'(x_o) = y_1$
		$y''(x_o) = y_2$

Ejemplo 1: Use el dato de que $y = ce^{2x}$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED $y' - 2y = 0$ para encontrar una solución del problema de valor inicial que consiste de esta ED y de la condición inicial $y(0) = 3$

$$y = ce^{2x} \quad \rightarrow \quad y(0) = 3 = ce^{0} = c \quad \rightarrow \quad c = 3 \quad \rightarrow \underline{\underline{y = 3e^{2x}}}$$

Ejemplo 2: Use el dato de que $y = c_1 \cos(4x) + c_2 sen(4x)$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ED $y'' + 16y = 0$ para encontrar una solución del problema de valor inicial que consiste de esta ED y de las condiciones iniciales $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \quad ; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$y = c_1 \cos(4x) + c_2 sen(4x)$$
$$y' = -4c_1 sen(4x) + 4c_2 \cos(4x)$$

$$-2 = c_1 \cos(2\pi) + c_2 sen(2\pi)$$
$$1 = -4c_1 sen(2\pi) + 4c_2 \cos(2\pi)$$

$$-2 = c_1 + 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2$$
$$1 = 0 + 4c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{4} \quad \therefore$$
$$y = -2\cos(4x) + \frac{1}{4} sen(4x)$$

- **<u>Teorema de Existencia y Unicidad para un PVI de 1er orden:</u>**

Si $f(x,y)$; $f_y(x,y)$ son continuas en una región rectangular R, entonces existe una solución única del PVI: $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$; $y(x_0)=y_0$ en R.

<u>Ejemplo 3:</u> Determine una región del plano xy para la cual la ED dada tenga una solución única

$$E.D.:\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1+y^3} \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^3} \quad , \quad f_y(x,y)=\frac{-3x^2y^2}{\left(1+y^3\right)^2}$$

$$de\ donde\ vemos\ que\ f\ y\ f_y\ son\ continuas\ en:\quad \Re=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\neq -1\right\}$$

<u>Ejemplos para la clase:</u>

$E1:\quad \left(4-y^2\right)y'=x^2$

$E2:\quad (y-x)y'=y+x$

$E3:\quad xy'=y$

<u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u>

Zill/Cullen - 13	Zill/Wright - 11	Problemas de Valor Inicial
Zill/Cullen - 19	Zill/Wright - 17	Modelación Matemática

<u>Tarea para entregar la próxima clase:</u>

Tarea No. 3 : Problemas de Valor Inicial

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No 3: Problemas de Valor Inicial

En los siguientes problemas use el dato de que $y = \dfrac{1}{1 + c_1 e^{-x}}$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED $y' = y - y^2$ para encontrar una solución del problema de valor inicial que consiste de esta ED y de la condición inicial dada.

$P1: \quad y(0) = \dfrac{-1}{3}$	$P2: \quad y(-1) = 2$

En los siguientes problemas use el dato de que $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ED $y'' - y = 0$ para encontrar una solución del problema de valor inicial que consiste de esta ED y de las condiciones iniciales dadas.

$P3: \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 2$	$P4: \quad y(-1) = 5 \quad ; \quad y'(-1) = -5$

Respuestas

$R1: \quad y = \dfrac{1}{1 - 4e^{-x}}$ $R2: \quad y = \dfrac{2}{2 - e^{-x-1}}$	$R3: \quad y = \dfrac{3}{2} e^{x} - \dfrac{1}{2} e^{-x}$ $R4: \quad y = 5e^{-x-1}$