Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.3 : Ecuaciones Diferenciales como Modelos Matemáticos

Modelo de Crecimiento de una Población		
La rapidez de crecimiento de la población	es proporcional a	la población (esto es, al número de habitantes)
$\frac{dP}{dt}$	α	$P(t)$
$\frac{dP}{dt}\alpha P \Rightarrow \frac{dP}{dt}=kP$		

Modelo de Desintegración Radioactiva		
La rapidez de desintegración de la sustancia	es proporcional a	la cantidad de sustancia presente
$\frac{dN}{dt}$	α	$N(t)$
$\frac{dN}{dt}\alpha N \Rightarrow \frac{dN}{dt}=kN$		

Modelo de Enfriamiento de Newton		
La rapidez de enfriamiento de un cuerpo	es proporcional a	la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio T_m
$\frac{dT}{dt}$	α	$T-T_m$
$\frac{dT}{dt}\alpha(T-T_m) \Rightarrow \frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$		

Modelo de Tanques de Mezclas		
V_T:volumen del tanque (gal) A(t): cantidad de sustancia en el tanque (lb)	G_1: gasto de entrada (gal/min) C_1: concent. de entrada (lb/gal) R_1= G_1x C_1:rapidez de entrada de sustancia (lb/min)	G_2: gasto de salida (gal/min) C_2: concent. de salida (lb/gal) R_2= G_2xC_2=G_2xA/V_T:rapidez de salida de sustancia (lb/min)

$$\begin{pmatrix} rapidez\, de\, cambio \\ de\, sustancia\, dentro \\ del\, tanque\, (lb/\min) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rapidez\, de \\ entrada\, de \\ sustancia \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} rapidez\, de \\ salida\, de \\ sustancia \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = R_1 - R_2 \qquad \left(\frac{dA}{dt}\right) = G_1 C_1 - G_2 \frac{A}{V_T}$$

Modelo de Vaciado de un Tanque de Agua

A_T: area transversal del tanque
A_O: area del orificio en la base del tanque
h: altura del nivel del agua en el tanque
Ley de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(A_T h)}{dt} = A_T \frac{dh}{dt} \quad \left(\frac{mt^3}{seg}\right)$$

$$\begin{pmatrix} rapidez \\ de\, salida \\ del\, agua \end{pmatrix} = A_0 \sqrt{2gh} \quad \left(\frac{mt^3}{seg}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_0}{A_T}\sqrt{2gh}$$

<u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u>

Zill/Cullen - 19	Zill/Wright - 17	Modelación Matemática
Zill/Cullen – 44	Zill/Wright - 41	Ecuaciones de Variables Separables

<u>Tarea para entregar la próxima clase:</u>
Tarea No. 4 : Modelación Matemática

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

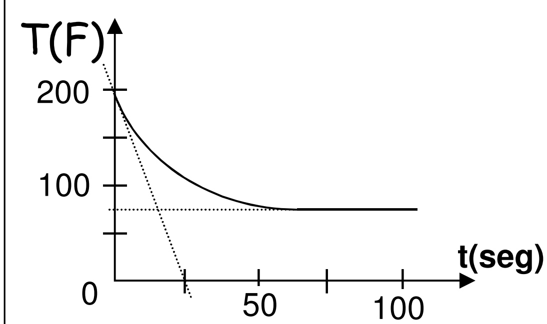
Tarea No 4: Modelación Matemática

P1: Con base en las hipótesis del modelo de la ecuación $\frac{dP}{dt}=kP$, (a) determine una ecuación diferencial que describa la población $P(t)$ de un país, cuando se permite una inmigración a una tasa constante r . (b) ¿Cuál es la ecuación diferencial cuando se permite que los individuos emigren con una rapidez constante r ?

P2: Deduzca una ecuación diferencial que describa la población $P(t)$, si la razón de natalidad es proporcional a la población que hay en el tiempo t, pero la razón de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población en el tiempo t.

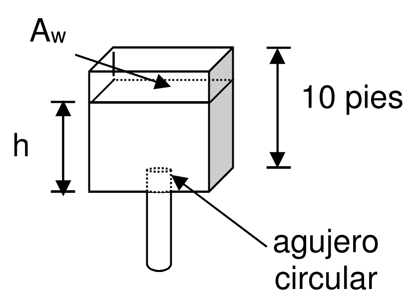
P3: Una taza de café se enfría obedeciendo a la ley de enfriamiento de Newton. De la gráfica mostrada estime T_m , T_0 , k con un modelo en forma de un problema de valor inicial de primer orden:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_m) \quad ; \quad T(0)=T_0$$

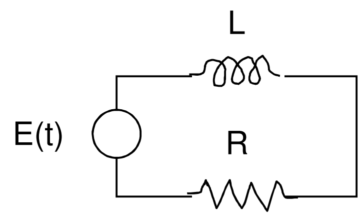


P4: Suponga que un alumno portador del virus de la gripa regresa a una escuela aislada de 1000 alumnos. Deduzca la ecuación diferencial que describa la cantidad de personas, $x(t)$, que hayan contraído la gripa, si la rapidez con la que se propaga la enfermedad es proporcional a la cantidad de interacciones entre los alumnos con gripa y los alumnos que todavía no han estado expuestos a ella.

P5: Por un agujero circular de área A_h, en el fondo de un tanque, sale agua. Debido a la fricción y a la contracción de la corriente cerca del agujero, la rapidez de cambio de la altura, se reduce a $\frac{dh}{dt}=c\frac{A_0}{A_w}\sqrt{2gh}$, donde $c\,(0\le c\le 1)$. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la altura h de agua en el tiempo t , que hay en el tanque cúbico de la figura. El radio del agujero es de 2 pulgadas y $g=32\,pies/seg^2$.



P6: Un circuito eléctrico en serie tiene una resistencia y una inductancia, como se muestra en la figura. Formule una ecuación diferencial para calcular la corriente $i(t)$, si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje aplicado es $E(t)$.



P7: Cuando se fija una masa m a un resorte que cuelga verticalmente suspendido de un techo, éste se estira s unidades y cuelga en reposo en la posición de equilibrio. Al desplazarse de su posición de equilibrio y soltarse, la masa empieza a oscilar verticalmente alrededor de su posición de equilibrio. Tome la dirección hacia abajo como positiva. Suponga que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso mg de la masa, y la fuerza de restitución del resorte alargado, que de acuerdo a la ley de Hooke es $F = -kx$. Deduzca una ecuación diferencial que describa el desplazamiento $x(t)$ de la masa en el tiempo t.

P8: Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente a razón constante de r gramos por segundo. Al mismo tiempo, esa medicina es eliminada del sistema con una rapidez proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en el tiempo t. Formule una ecuación diferencial que describa la cantidad $x(t)$.

P9: En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponga que M representa la cantidad total de un tema que se debe memorizar, y que $A(t)$ es la cantidad memorizada en el tiempo t. Deduzca una ecuación diferencial para determinar la cantidad $A(t)$.

$$R1: \quad \frac{dP}{dt} = kP + r \quad ; \quad \frac{dP}{dt} = kP - r$$

$$R2: \quad \frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P^2$$

$$R3: \quad \frac{dT}{dt} = \left(-\frac{8}{125}\right)(T - 75) \quad ; \quad T(0) = 200$$

$$T_m = 75 \quad ; \quad T_0 = 200 \quad ; \quad k = \frac{[((200-0)/(0-25))]}{200-75}$$

$$R4: \quad \frac{dx}{dt} = kx(1000 - x)$$

$$R5: \quad \frac{dh}{dt} = \frac{c\pi}{450}\sqrt{h}$$

$$R6: \quad L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

$$R7: \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$R8: \quad \frac{dx}{dt} + kx = r$$

$$R9: \quad \frac{dA}{dt} = k(M - A)$$