

Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.4 : Ecuaciones de Variables Separables

- **Solución por Integración:**

Cuando en la ED de 1er orden: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se tiene el caso especial en que

$\frac{dy}{dx} = g(x)$ entonces la solución de la ED es simplemente:

$$y = \int g(x)dx = G(x) + c$$

- **Ecuaciones de Variables Separables:**

Cuando en la ED de 1er orden: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se tiene el caso especial en que

$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{p(y)} = g(x)h(y)$; $h(y) = \frac{1}{p(y)}$ entonces se pueden separar las variables e integrar, esto es:

$$p(y)dy = g(x)dx; \int p(y)dy = \int g(x)dx; P(y) = G(x) + c$$

- **Ejemplo:**

$$(1-x)dy + ydx = 0$$

$$(1-x)dy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{1-x}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{1-x}dx$$

$$u = 1-x; du = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{du}{u}$$

$$\ln(y) = \ln(u) + c_0$$

$$y = e^{\ln(u)+c_0}$$

$$y = e^{\ln(u)} \cdot e^{c_0}$$

$$e^{c_0} = c_1$$

$$y = c_1 e^{\ln(u)} = c_1 u$$

$$y = c_1(1-x)$$

Ejemplos para la clase:

$$E1: \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 y^2}{1+x}$$

$$E2: (e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$$

$$E3: \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

$$E4: \frac{dy}{dx} = x^2(1+y) \quad ; \quad y(0) = 3$$

$$R1: -3 + 3x \ln x = xy^3 + cx$$

$$R2: (e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$$

$$R3: y - 5 \ln(y+3) = x - 5 \ln(x+4) + c$$

$$\left(\frac{y+3}{x+4} \right)^5 = c_1 e^{y-x}$$

$$R4: y = 4e^{x^3/3} - 1$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 44 Zill/Wright - 41 Problemas de Variables Separables

Zill/Cullen - 62 Zill/Wright - 55 Ecuaciones Exactas

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 5 : Ecuaciones de Variables Separables

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No 5: Ecuaciones de Variables Separables

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el Método de Separación de Variables.

$$P1: \quad x \frac{dy}{dx} = 4y$$

$$P2: \quad y \ln x \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x} \right)^2$$

$$P3: \quad \frac{dS}{dr} = kS$$

$$P4: \quad \frac{dP}{dt} = P - P^2$$

$$P5: \quad \frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$$

$$R1: \quad y = cx^4$$

$$R2: \quad \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln y + c$$

$$R3: \quad S = ce^{kr}$$

$$R4: \quad P = \frac{ce^t}{1+ce^t}$$

$$R5: \quad y = \text{sen} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$$

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$P6: \quad \frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1) \quad ; \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$R6: \quad x = \tan \left(4t - \frac{3\pi}{4} \right)$$

Determine una solución implícita y una explícita para el problema de valor inicial siguiente:

$$P7: \quad \sqrt{1-y^2} dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0$$

$$y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Use la identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$R7: \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$