Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.5 : Ecuaciones Lineales

- Recordemos la forma general de la ED Lineal de 1er orden:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \quad o \text{ también} \quad a_1(y)\frac{dx}{dy}+a_0(y)x=g(y)$$

- Dividiendo toda la ecuación entre el coeficiente a_1 de y', y designando como

$$P(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad y \quad h(x)=\frac{g(x)}{a_1(x)} \quad obtenemos\ que:$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=h(x) \quad o\ tambien \quad \frac{dx}{dy}+P(y)x=h(y)$$

a esta última forma de la EDL de 1er orden le llamaremos la forma estándar.

- Veamos ahora que aún cuando esta ED no es exacta si tiene un factor de integración que la hace exacta:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}+P(x)y-h(x)=0$$

$$\underbrace{[P(x)y-h(x)]}_{M(x,y)}dx+\underbrace{1}_{N(x,y)}dy=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} M_y=P(x) \\ N_x=0 \end{array}\right\} no\ es\ exacta$$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{P(x)-0}{1}=P(x)=p(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int P(x)dx}$$

- Multipliquemos ahora la ED original por este factor de integración y procedamos a deducir una forma general para la solución de la ED Lineal de 1er orden:

$$e^{\int P(x)dx}[P(x)y-h(x)]dx+e^{\int P(x)dx}dy=0$$

$$ye^{\int P(x)dx}P(x)dx-h(x)e^{\int P(x)dx}dx+e^{\int P(x)dx}dy=0$$

$$ye^{\int P(x)dx}P(x)dx+e^{\int P(x)dx}dy=h(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$d\left[ye^{\int P(x)dx}\right]=h(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$\int d\left[ye^{\int P(x)dx}\right] = \int h(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int h(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int h(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right] \quad o\ abreviando:$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \qquad y\ además \qquad y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu \cdot h \cdot dx + c\right]$$

- **Ejemplo:**

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)y = \frac{2xe^{-x}}{x+1}$$

$$\mu = e^{\int\left(\frac{x+2}{x+1}\right)dx} = e^{\int\left[1+\frac{1}{x+1}\right]dx} = e^{[x+\ln(x+1)]} = e^{x} \cdot e^{\ln(x+1)} = (x+1)e^{x}$$

$$y = \frac{1}{(x+1)e^{x}}\left[\int (x+1)e^{x} \cdot \frac{2xe^{-x}}{x+1} \cdot dx + c\right]$$

$$y = \frac{1}{(x+1)e^{x}}\left[\int 2x \cdot dx + c\right] \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2 + c}{(x+1)e^{x}}$$

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = h(x)$	$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$	$y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu \cdot h \cdot dx + c\right]$
$\frac{dx}{dy} + P(y)x = h(y)$	$\mu(y) = e^{\int P(y)dy}$	$x = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu \cdot h \cdot dy + c\right]$

Ejemplos para la clase: $E1: \quad ydx + \left(x + 2xy^2 - 2y\right)dy = 0$ $E2: \quad x^2 y' + x(x+2)y = e^x$ $E3: \quad \left(x + 4y^2\right)dy + 2ydx = 0$ $E4: \quad (x+2)^2 \dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$	$R1: \quad x = \dfrac{1}{y} + \dfrac{c}{y} e^{-y^2}$ $R2: \quad y = \dfrac{1}{2x^2} e^x + \dfrac{c}{x^2} e^{-x}$ $R3: \quad x = -\dfrac{4}{5} y^2 + cy^{-1/2}$ $R4: \quad y = \dfrac{5}{3(x+2)} + \dfrac{c}{(x+2)^4}$

Para la próxima clase estudiar las secciones:
Zill/Cullen - 53 Zill/Wright - 47 Ecuaciones Lineales
Zill/Cullen - 70 Zill/Wright - 61 Método de Sustitución

Tarea para entregar la próxima clase:
Tarea No. 6 : Ecuaciones Lineales

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No 6 : Ecuaciones Lineales

Determine la solución general de la ecuación diferencial lineal dada:

$P1: \quad \frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$	$R1: \quad y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$
$P2: \quad y' + 3x^2 y = x^2$	$R2: \quad y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$
$P3: \quad x\frac{dy}{dx} - y = x^2 senx$	$R3: \quad y = cx - x\cos x$
$P4: \quad ydx - 4\left(x + y^6\right)dy = 0$	$R4: \quad x = 2y^6 + cy^4$
$P5: \quad (x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$	$R5: \quad y = \frac{x^2 + c}{(x+1)e^x}$

Resuelva los problemas de valor inicial siguientes:

$P6: \quad xy' + y = e^x \quad ; \quad y(1) = 2$	$R6: \quad y = \frac{e^x + 2 - e}{x}$
$P7: \quad (x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x$ $y(1) = 10$	$R7: \quad y = \frac{x\ln x - x + 21}{x+1}$