

Unidad 2 : Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.1 : Definiciones y Terminología

- **La Ecuación Diferencial Lineal de 2o Orden No Homogénea** tiene la forma:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{ecuación (1) EDLN - H}$$

- **La Ecuación Diferencial Lineal de 2o Orden Homogénea Asociada**

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad \text{ecuación (2) EDLH}$$

- **Operadores Diferenciales:**

$$\frac{d}{dx} = D ; \quad \frac{d^2}{dx^2} = D^2 ; \quad \frac{d^3}{dx^3} = D^3 \Rightarrow$$

$$4y'' + 3y' + 5y = 2\cos(3x) \Rightarrow 4D^2y + 3Dy + 5y = 2\cos(3x) \Rightarrow$$

$$(4D^2 + 3D + 5)y = 2\cos(3x) \Rightarrow L \equiv 4D^2 + 3D + 5 \Rightarrow L[y] = 2\cos(3x)$$

$$L \equiv a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \Rightarrow$$

$$L[y] = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

$$L[y] = g(x) \quad \text{representa (1) EDLN - H}$$

$$L[y] = 0 \quad \text{representa (2) EDLH}$$

- **Principio de Superposición para la EDLH.**

Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones de la EDLH (2), entonces la combinación lineal $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es solución.

$$\text{Datos: } L[y_1(x)] = 0 ; \quad L[y_2(x)] = 0$$

$$\text{Verificación: } L[y(x)] = L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = L[c_1y_1(x)] + L[c_2y_2(x)] \\ c_1L[y_1(x)] + c_2L[y_2(x)] = 0$$

- **Independencia Lineal**

Un conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ se dice que es Linealmente Independiente, abreviado LI, si ninguna de las funciones $f_k(x)$ puede expresarse como una combinación lineal de las demás. En caso contrario se dice que el conjunto es Linealmente Dependiente, abreviado LD.

Ejemplo: $\{f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x, f_4(x) = 2x^2 - 3x + 4x^3\}$
es un conjunto LD ya que $f_4(x) = 2f_2(x) - 3f_3(x) + 4f_1(x)$

- **Wronskiano**

El wronskiano $W(f_1, f_2)$ de un conjunto de dos funciones $\{f_1, f_2\}$ se define con

el determinante: $W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2$.

El wronskiano $W(f_1, f_2, f_3)$ de un conjunto de tres funciones $\{f_1, f_2, f_3\}$ se

define con el determinante:

$$W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix}$$

$$= f_1 \begin{vmatrix} f_2' & f_3' \\ f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} f_1' & f_3' \\ f_1'' & f_3'' \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente para ordenes mayores.

- **Criterio para Independencia Lineal**

Un conjunto de "n" funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es Linealmente Independiente, si y solo si, su wronskiano es diferente de cero en un intervalo I, esto es, si $W \neq 0$.

Ejemplo: $\{e^{2x}, e^{3x}\}$ es LI ya que $W(e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$

- **Conjunto Fundamental de Soluciones, CFS**

(a) Si $\{y_1, y_2\}$ son soluciones de la EDLH de 2º orden y

(b) además son LI, constituyen entonces un CFS de la EDLH.

Ejemplo: $\{e^{2x}, e^{3x}\}$ constituye un CFS de la EDLH: $y'' - 5y' + 6y = 0$; ya que ambas funciones satisfacen la EDLH y además el conjunto $\{e^{2x}, e^{3x}\}$ es LI.

- **Solución General de la EDLH de 2o orden, $y_h(x)$**

Si $\{y_1, y_2\}$ constituyen un CFS de la EDLH entonces la solución general de la EDLH es: $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

A esta solución $y_h(x)$ algunas veces se le llama la solución homogénea, por ser la solución de la EDLH, y algunas veces se le llama la solución complementaria de la EDLN-H, y se le denota como $y_c(x)$. Por tanto $y_h = y_c$

Ejemplo: la solución general de la EDLH: $y'' - 5y' + 6y = 0$; está dada por:

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

- **Solución Particular $y_p(x)$**

Cualquier función $y_p(x)$ que satisfice la EDLN-H (1), $L[y(x)] = g(x)$ se llama solución particular.

- **Solución General de la EDLN-H de 2o orden**

Si $y_p(x)$ es una solución particular de la EDLN-H y $\{y_1, y_2\}$ es un CFS de la EDLH asociada, entonces la solución general de la EDLN-H es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

- **Principio de Superposición para EDLN-H.**

Si tenemos una EDLN-H, $L[y(x)] = g(x)$, tal que

$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$, y si conocemos soluciones particulares

y_{p1}, y_{p2}, y_{p3} tales que

$L[y_{p1}(x)] = g_1(x)$; $L[y_{p2}(x)] = g_2(x)$; $L[y_{p3}(x)] = g_3(x)$; entonces se cumple

que: $L[y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x)] = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$

• **Ejemplo:**

Si $y_{p1}(x) = -4x^2$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$; y

si $y_{p2}(x) = e^{2x}$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$; y

si $y_{p3}(x) = xe^x$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = (2x - 1)e^x$

entonces:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x) = -4x^2 + e^{2x} + xe^x$$

es solución particular de la EDLN-H:

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + (2x - 1)e^x$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 118 Zill/Wright - 98 Teoría Preliminar

Zill/Cullen - 130 Zill/Wright - 109 Reducción de Orden

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 8 : Definiciones y Terminología

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 8 : Definiciones y Terminología

En los siguientes problemas cada familia de funciones es la solución general de la ED dada en el intervalo indicado. Determine un miembro de la familia que sea solución del problema de valor inicial.

$$P1: y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} ; (-\infty, \infty) ; y'' - y = 0 ; y(0) = 0 ; y'(0) = 1$$

$$P2: y = c_1 x + c_2 x \ln x ; (0, \infty) ; x^2 y'' - xy' + y = 0 ; y(1) = 3 ; y'(1) = -1$$

En los siguientes problemas investigue si los conjuntos de funciones son linealmente independientes, (LI), en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$P3: f_1(x) = x ; f_2(x) = x - 1 ; f_3(x) = x + 3$$

$$P4: f_1(x) = 1 + x ; f_2(x) = x ; f_3(x) = x^2$$

En los problemas siguientes compruebe que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ED en el intervalo indicado. Forme la solución general.

$$P5: y'' - y' - 12y = 0 ; \{e^{-3x}, e^{4x}\} ; (-\infty, \infty)$$

$$P6: x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0 ; \{x, x^{-2}, x^{-2} \ln x\} ; (0, \infty)$$

Compruebe que la familia biparamétrica de funciones dadas en los siguientes problemas sea la solución general de la ED no homogénea dada.

$$P7: y'' - 7y' + 10y = 24e^x ; y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + 6e^x$$

$$P8: y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12 ; y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2$$

$$R1: y = (e^x - e^{-x})/2$$

$$R2: y = 3x - 4x \ln x$$

R3: *dependiente*

R4: *independiente*

R5: Las funciones satisfacen la ED y son linealmente independientes en el intervalo, porque:

$$W(e^{-3x}, e^{4x}) = 7e^x \neq 0 ; y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

R6: Las funciones satisfacen la ED y son linealmente independientes en el intervalo, porque:

$$W(x, x^{-2}, x^{-2} \ln x) = 9x^{-6} \neq 0 ;$$

$$y = c_1 x + c_2 x^{-2} + c_3 x^{-2} \ln x$$