Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.2: EDL Homogéneas con Coeficientes Constantes (EDLHCC)

<u>Primera Parte: EDLHCC de 2o Orden.</u>

- La forma general para la EDLHCC de 2o orden es: $ay'' + by' + cy = 0$

  La forma estándar para la EDLHCC de 2o orden es: $y'' + Py' + Qy = 0$;

comparando ambas ecuaciones vemos que: $P = \frac{b}{a}$

- Para resolver esta ED suponemos que la solución es una función de la forma

$y = e^{mx}$ y procedemos a sustituirla en la ED para determinar los posibles valores del parámetro m que la satisfacen:

$$y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad y' = me^{mx} \quad \Rightarrow \quad y'' = m^2 e^{mx}$$

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

$$y \ como \ e^{mx} \neq 0 \ para \ toda \ x \in \Re$$

$$\underline{\underline{am^2 + bm + c = 0}} \ Ecuación \ Auxiliar \ o \ Característica$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- <u>**Caso I: Raíces Reales Diferentes (RRD)**</u>

En el caso que $b^2 - 4ac > 0$ tendremos dos raíces reales diferentes $m_1 \, y \, m_2$, y tendremos por tanto dos funciones que satisfacen la ED: $y_1 = e^{m_1 x}$; $y_2 = e^{m_2 x}$ y la solución general $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de la EDLHCC en este Caso I será:

$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad ; \quad Caso I \quad ; \quad RRD}}$$

- **Caso II: Raíces Reales Repetidas (RRR)**

En el caso que $b^2 - 4ac = 0$ tendremos dos raíces reales repetidas, esto es, tendremos que: $m_1 = m_2 = m = \dfrac{-b}{2a}$ y obtenemos solamente una solución $y_1 = e^{mx}$

En este caso utilizamos la fórmula para la segunda solución para obtener la otra solución que necesitamos para obtener la solución general:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{{y_1}^2} dx = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{e^{2mx}} dx = y_1 \int e^{-\frac{b}{a}x} e^{-2mx} dx = y_1 \int e^{-\left(\frac{b}{a}+2m\right)x} dx$$

$$y \ como \ m = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2ma = -b \Rightarrow 2m + \frac{b}{a} = 0 \ \therefore$$

$$y_2 = y_1 \int e^{-\left(\frac{b}{a}+2m\right)x} dx = y_1 \int e^0 dx = y_1 \int dx = y_1 x \Rightarrow y_2 = x y_1(x) = x e^{mx}$$

$$y \ como \ y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad tenemos \ finalmente \ que:$$

$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \quad ; \quad Caso \ II \quad ; \quad RRR}}$$

$Ejemplo\,1:$ $y'' - 5y' + 6y = 0$ $m^2 - 5m + 6 = 0$ $m = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ $m = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 3 \end{cases}$ $(m-2)(m-3) = 0$ $m_1 = 2\,,\, m_2 = 3$ $y_1 = e^{2x}\ ; \quad y_2 = e^{3x}$ $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\underline{\underline{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}}$	$Ejemplo\,2:$ $y'' - 6y' + 9y = 0$ $m^2 - 6m + 9 = 0$ $m = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$ $m = \dfrac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 3 \end{cases}$ $(m-3)(m-3) = 0$ $m_1 = m_2 = m = 3$ $y_1 = e^{3x}\ ; \quad y_2 = x e^{3x}$ $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\underline{\underline{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}}$	$Ejemplo\,3:$ $y'' - 4y' + 13y = 0$ $m^2 - 4m + 13 = 0$ $m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2}$ $m = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$ $m = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} m_1 = \overbrace{2}^{\alpha} + \overbrace{3}^{\beta} i \\ m_2 = 2 - 3i \end{cases}$ $y_1 = e^{2x} \cos 3x$ $y_2 = e^{2x} sen 3x$ $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\underline{\underline{y_h = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} sen 3x}}$

- **Caso III: Raíces Complejas Conjugadas (RCC)**

En el caso que $b^2 - 4ac < 0$ tenemos raíces complejas conjugadas:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\left(4ac - b^2\right)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} =$$

$$m = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i \Rightarrow en\ \ forma\ abreviada: \quad \underline{\underline{m = \alpha \pm i\beta}}$$

$$y\ utilizando\ la\ \ fórmula\ de\ Euler: \quad e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm isen\theta$$

$$tenemos\ que\ la\ solución\ general\ será:$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + isen\beta x) + c_2(\cos\beta x - isen\beta x)\right]$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)sen\beta x\right]$$

$$de\ este\ conjunto\ de\ soluciones\ complejas\ \ podemos$$

$$seleccionar\ un\ subconjunto\ de\ \ funciones\ reales\ tomando:$$

$$c_1 = a + ib\ ;\ c_2 = a - ib \Rightarrow c_1 + c_2 = 2a\ ;\ i(c_1 - c_2) = 2b$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[2a\cos\beta x + 2bsen\beta x\right];\ c_3 = 2a\ ;\ c_4 = 2b$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[c_3\cos\beta x + c_4 sen\beta x\right];\ c_3 \to c_1\ ;\ c_4 \to c_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_h = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} sen\beta x \quad ; \quad Caso\ III \quad ; \quad RCC}}$$

$$por\ lo\ que\ en\ este\ caso: \underline{y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x}\ ;\ \underline{y_2 = e^{\alpha x} sen\beta x}$$

Ejemplos para la clase:	
$E1: \quad y'' - y' - 6y = 0$	$R1: \quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$
$E2: \quad y'' + 8y' + 16y = 0$	$R2: \quad y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$
$E3: \quad y'' - 4y' + 5y = 0$	$R3: \quad y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x} senx$
$E4: \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$R4: \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$
$E5: \quad y^{(4)} + y''' + y'' = 0$	$R5: \quad y = c_1 + c_2 x + e^{-x/2}\left(c_3\cos\left(\sqrt{3}x/2\right) + c_4\sin\left(\sqrt{3}x/2\right)\right)$

Mas ejemplos para la clase:

$E6:\quad 16y^{(4)}+24y''+9y=0$

$E7:\quad y^{(5)}-16y'=0$

$E8:\quad y^{(5)}-5y^{(4)}+12y'''-8y''=0$

$E9:\quad y'''-8y=0\,;$

$y(0)=0\,;\; y'(0)=-1\,;\; y''(0)=0$

$$R6:\quad y=c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$
$$+c_3 x\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_4 x sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$R7:\quad y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$$
$$+c_4\cos 2x+c_5 sen 2x$$

$$R8:\quad y=c_1+c_2x+c_3e^{x}$$
$$+c_4e^{2x}\cos 2x+c_5e^{2x}sen 2x$$

$$R9:\quad y=\frac{-1}{6}e^{2x}$$
$$+\frac{1}{6}e^{-x}\cos\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-x}sen\sqrt{3}x$$

También se podría ver si sobra tiempo:

- Algunos ejemplos al revés: encontrar la ED partiendo de la solución
- Construir algunos Operadores Anuladores

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 133 Zill/Wright - 112 EDLH de Coeficientes Constantes
Zill/Cullen - 140 Zill/Wright - 119 Método de Coeficientes Indeterminados

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 9 : ED Lineales Homogéneas de Coeficientes Ctes

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 9 : Ecuaciones Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones:

$P1: \quad 4y'' + y' = 0$	$R1: \quad y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$
$P2: \quad 12y'' - 5y' - 2y = 0$	$R2: \quad y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{-x/4}$
$P3: \quad y'' + 9y = 0$	$R3: \quad y = c_1 \cos 3x + c_2 sen 3x$
$P4: \quad 3y'' + 2y' + y = 0$	$R4: \quad y = e^{-x/3}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x \right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x \right) \right)$
$P5: \quad y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$	$R5: \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$
$P6: \quad 16y^{(4)} + 24y'' + 9y = 0$	$R6: \quad y = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_3 x \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_4 x sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

Determine la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$P7: \quad y'' + 16y = 0 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0) = -2$	$R7: \quad y = 2\cos 4x - \frac{1}{2} sen 4x$
$P8: \quad y''' + 12y'' + 36y' = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 ; \quad y'(0) = 1 ; \quad y''(0) = -7$	$R8: \quad y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} e^{-6x} + \frac{1}{6} x e^{-6x}$

EDLHCC: Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes			
Ecuación Diferencial: $ay'' + by' + cy = 0$		Ecuación Auxiliar: $am^2 + bm + c = 0$	
Caso I	**Raíces Reales Diferentes** $b^2 - 4ac > 0$ $m_1 \neq m_2$	$y_1 = e^{m_1 x}$ $y_2 = e^{m_2 x}$	$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ Movimiento Sobre Amortiguado
Caso II	**Raíces Reales Repetidas** $b^2 - 4ac = 0$ $m_1 = m_2 = m$	$y_1 = e^{mx}$ $y_2 = xe^{mx}$	$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $y_h = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$ Mov. Críticamente Amortiguado
Caso III	**Raíces Complejas Conjugadas** $b^2 - 4ac < 0$ $m = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $y_2 = e^{\alpha x} sen(\beta x)$	$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $y_h = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x)$ $\alpha \neq 0$ Movimiento Amortiguado $\alpha = 0$ Movimiento Armónico Simple