Unidad 2 : Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.3 : Método de Coeficientes Indeterminados

En esta sección estudiaremos uno de los dos métodos para resolver EDL No-Homogéneas de orden mayor o igual a dos. Empezaremos con las EDLNH de 2o orden de la forma estándar: $ay''+by'+cy=g(x)$. Este método, llamado Método de Coeficientes Indeterminados, puede aplicarse cuando la función g(x) contiene solo tres tipos de funciones: polinomios, exponenciales, y senos y cosenos, o combinaciones de ellas.

1. Se resuelve la EDLH asociada para determinar y_h
2. Se propone la forma de y_p con coeficientes indeterminados, a partir de la forma del término g(x); usando el criterio de la siguiente tabla

g(x)	$y_p(x)$ propuesta
$a_m x^m+...+a_2x^2+a_1x+a_0$	$A_m x^m+...+A_2x^2+A_1x+A_0$
$e^{\alpha x}\cdot(a_m x^m+...+a_2x^2+a_1x+a_0)$	$e^{\alpha x}\cdot(A_m x^m+...+A_2x^2+A_1x+A_0)$
$p_m(x)\cos(\beta x)+q_n(x)sen(\beta x)$	$p_k(x)\cos(\beta x)+q_k(x)sen(\beta x)\,;\,k=\max(m,n)$
$p_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+q_n(x)e^{\alpha x}sen(\beta x)$	$p_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+q_k(x)e^{\alpha x}sen(\beta x);k=\max(m,n)$
$p_m(x)$ y $q_n(x)$ son polinomios de orden "n" y "m"	

3. Se modifica la y_p propuesta comparándola con y_h y multiplicando por "x" los términos de y_p que estén incluidos en y_h. Después se vuelve a comparar y_p con y_h y se vuelven a multiplicar por "x" los términos que sigan estando incluidos en y_h. Este proceso se continúa repitiendo hasta que ninguno de los términos de y_h esté repetido en y_p.

4. Se sustituye la y_p modificada en la EDLNH original para determinar los coeficientes indeterminados igualando los coeficientes de los términos del lado izquierdo de la ecuación con los coeficientes de los términos semejantes del lado derecho de la ecuación.

5. Se sustituyen los coeficientes que se han determinado en la forma de la y_p modificada para determinar la y_p final. Y finalmente se suman y_p y y_h para obtener la solución general de la EDLNH $y = y_h + y_p$

Algunos ejemplos de la forma de proponer y_p dependiendo de g(x)			
g(x)	**y_p(x) propuesta**	**g(x)**	**y_p(x) propuesta**
-8	A	7cos(4x)	Asen(4x)+Bcos(4x)
5x+7	Ax + B	$-3e^{5x}$	$A\,e^{5x}$
$3x^2-2$	$A\,x^2+Bx+C$	$(3\,x^2+2)\,e^{5x}$	$(A\,x^2+Bx+C)\,e^{5x}$
$2x^3-5x+7$	$A\,x^3+B\,x^2+Cx+D$	$5\,x^2\cos(4x)$	$(A\,x^2+Bx+C)\cos(4x)+$ $(D\,x^2+Ex+F)\text{sen}(4x)$
5sen(4x)	Asen(4x)+Bcos(4x)	$-3x\,e^{5x}\cos(4x)$	$(Ax+B)\,e^{5x}\cos(4x)+$ $(Cx+D)\,e^{5x}\,\text{sen}(4x)$

Ejemplos para la clase:
(Sin repetición de términos)

$$E1:\quad y''+4y'+4y=4x^2-8x$$
$$E2:\quad y''+2y'+y=\sin x+3\cos 2x$$

$$R1:\quad y_p = x^2-4x+7/2$$
$$R2:\quad y_p = -\frac{1}{2}\cos x+\frac{12}{25}\sin 2x-\frac{9}{25}\cos 2x$$

Ejemplos para la clase:

$$E3:\quad y''+4y=3sen2x$$
$$E4:\quad y''-2y'+y=e^x$$
$$E5:\quad y''+y=4x+10senx$$
$$E6:\quad y''-6y'+9y=6x^2+2-12e^{3x}$$

$$R3:\quad y_p=-\frac{3}{4}x\cos 2x$$
$$R4:\quad y_p=\frac{1}{2}x^2e^x$$
$$R5:\quad y_p=4x-5x\cos x$$
$$R6:\quad y_p=\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{2}{3}-6x^2e^{3x}$$

<table>
<tr>
<td>

<u>Obtener solo la forma de yp sin calcular los coeficientes:</u>

$E1: y^{(4)} + y''' = 1 - x^2 e^{-x}$

$E2: y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2 e^{2x} + 3e^{5x}$

$E3: y'' + 4y' + 4y = 4x^2 - 8x$

$E4: y'' + 2y' + y = senx + 3\cos 2x$

</td>
<td>

$R1: y_p = Ax^3 + \left(Bx^3 + Cx^2 + Dx\right)e^x$

$R2: y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + \left(Dx^4 + Ex^3 + Fx^2\right)e^{2x} + Ge^{5x}$

$R3: y_p = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

$R4: y_p = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25} sen 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$

</td>
</tr>
</table>

<u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u>

Zill/Cullen - 140	Zill/Wright - 119	Método de Coeficientes Indeterminados
Zill/Cullen - 157	Zill/Wright - 128	Método de Variación de Parámetros

<u>Tarea para entregar la próxima clase:</u>

Tarea No. 10 : Método de Coeficientes Indeterminados

Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.3b : Método de Coeficientes Indeterminados

Ejemplo del proceso para determinar la forma de la solución particular $y_p(x)$ a partir de la forma de la función $g(x)$, en el caso de que $g(x)$ contenga productos de dos de las tres funciones básicas, esto es, de polinomios, senos y cosenos, y exponenciales

Ejemplo del proceso de construcción de la $y_p(x)$ propuesta a partir de la forma de la función $g(x)$

$$g(x) = \underbrace{5x^3e^{4x}}_{g_1(x)} - \underbrace{3x^2\cos 5x}_{g_2(x)} + \underbrace{2e^{3x}sen4x}_{g_3(x)}$$

$g_1(x) = 5x^3e^{4x}$	$y_{p_1} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{4x}$ $y_{p_1} = Ax^3e^{4x} + Bx^2e^{4x} + Cxe^{4x} + De^{4x}$
$g_2(x) = -3x^2\cos 5x$	$y_{p_2} = (Ex^2 + Fx + G)\cos 5x + (Hx^2 + Ix + J)sen5x$ $y_{p_2} = Ex^2\cos 5x + Fx\cos 5x + G\cos 5x +$ $Hx^2sen5x + Ixsen5x + Jsen5x$
$g_3(x) = 2e^{3x}sen4x$	$y_{p_3} = e^{3x}(K\cos 4x + Lsen4x)$ $y_{p_3} = Ke^{3x}\cos 4x + Le^{3x}sen4x$

La $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p = Ax^3e^{4x} + Bx^2e^{4x} + Cxe^{4x} + De^{4x} + Ex^2\cos 5x + Fx\cos 5x + G\cos 5x +$$
$$Hx^2sen5x + Ixsen5x + Jsen5x + Ke^{3x}\cos 4x + Le^{3x}sen4x$$

Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.3 c : Método de Coeficientes Indeterminados

Ejemplo de:

a) el proceso de construcción de la $y_p(x)$ propuesta a partir de la forma de la función $g(x)$, y de

b) el proceso de modificación de la $y_p(x)$ propuesta al compararla con la solución de la EDLH asociada $y_h(x)$

a) Ejemplo del proceso de construcción de la $y_p(x)$ propuesta a partir de la forma de la función $g(x)$

$$g(x) = \underbrace{3x^4 - 5x^2 + 8}_{g_1(x)} + \underbrace{6e^{5x}}_{g_2(x)} + \underbrace{3\cos 2x}_{g_3(x)}$$

$g_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 8$	$y_{p_1} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$
$g_2(x) = 6e^{5x}$	$y_{p_2} = Fe^{5x}$
$g_3(x) = 3\cos 2x$	$y_{p_3} = G\cos 2x + Hsen2x$

la $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p(x) = \underbrace{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}_{y_{p1}} + \underbrace{Fe^{5x}}_{y_{p2}} + \underbrace{G\cos 2x + Hsen2x}_{y_{p3}}$$

b) **Ejemplo 1**: Cuando se repite un término de y_{p_2} con un término de y_h

$$y'' - 10y' + 25y = 3x^4 - 5x^2 + 8 + 6e^{5x} + 3\cos 2x$$
$$m^2 - 10m + 25 = 0$$
$$(m-5)(m-5) = 0$$
$$y_h = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

$$y_{p_2} = Fe^{5x} \sim y_h$$
$$y_{p_2} = Fxe^{5x} \sim y_h$$
$$y_{p_2} = Fx^2 e^{5x} \sim y_h$$

por lo que la $y_p(x)$ modificada será:

$$\underline{\underline{y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E + Fx^2 e^{5x} + G\cos 2x + Hsen2x}}$$

b) **Ejemplo 2**: Cuando se repiten dos términos de y_{p_3} con dos términos de y_h

la $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p(x) = \underbrace{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}_{y_{p1}} + \underbrace{Fe^{5x}}_{y_{p2}} + \underbrace{G\cos 2x + Hsen2x}_{y_{p3}}$$

$$y'' + 4y = 3x^4 - 5x^2 + 8 + 6e^{5x} + 3\cos 2x$$

$$m^2 + 4 = 0$$

$$m = \pm 2i$$

$$\alpha = 0; \beta = 2$$

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 sen2x$$

$$y_{p_3} = G\cos 2x + Hsen2x \sim y_h$$

$$y_{p_3} = Gx\cos 2x + Hxsen2x \sim y_h$$

por lo que la $y_p(x)$ modificada será:

$$y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E + Fe^{5x} + Gx\cos 2x + Hxsen2x$$

c) **Ejemplo 3**: Cuando se repiten tres términos de y_{p_1} con tres términos de y_h

la $y_p(x)$ propuesta se construye sumando las tres $y_p(x)$'s

$$y_p(x) = \underbrace{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}_{y_{p1}} + \underbrace{Fe^{5x}}_{y_{p2}} + \underbrace{G\cos 2x + Hsen2x}_{y_{p3}}$$

$$y''' = 3x^4 - 5x^2 + 8 + 6e^{5x} + 3\cos 2x$$

$$m^3 = 0 \quad ; \quad m \cdot m \cdot m = 0$$

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

$$y_{p_1} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \sim y_h$$

$$y_{p_1} = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex \sim y_h$$

$$y_{p_1} = Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 \sim y_h$$

$$y_{p_1} = Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 \sim y_h$$

por lo que la $y_p(x)$ modificada será:

$$y_p(x) = Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fe^{5x} + G\cos 2x + Hsen\, 2x$$

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 10: Método de Coeficientes Indeterminados

Encuentre la solución general de las siguientes EDL No Homogéneas.

	Ecuación Diferencial	Solución
1	$y'' + y' - 6y = 2x$	$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}$
2	$y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$	$y = c_1 e^{-2x} + c_2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}xe^{-2x}$
3	$4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$	$y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{-x/2}$ $- \frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425} sen 2x$
4	$y'' + 2y' - 24y = 16 - (x+2)e^{4x}$	$y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{4x} - \frac{2}{3}$ $-\left(\frac{1}{20}x^2 + \frac{19}{100}x\right)e^{4x}$
5	$y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$	$y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x$ $- x - 3 - \frac{2}{3}x^3 e^x$
6	$y'' + 4y' + 4y = (3+x)e^{-2x}$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 5$	$y = 2e^{-2x} + 9xe^{-2x} +$ $\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{-2x}$