Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Tema 2.4: Modelación con Ecuaciones de 2º Orden

Ejemplos para la clase: (Zill 9ª Ed; Sec 5.1; ejercicios 5,23,31)

Ejemplo 1: Un contrapeso de 20 lb estira 6 pulg a un resorte. En ese sistema, el contrapeso se suelta, partiendo del reposo, a 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio.

(a) Calcule la posición del contrapeso cuando $t = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\ y\ \frac{9\pi}{32}$ segundos.

(b) ¿Cuál es la velocidad del contrapeso cuando $t = \frac{3\pi}{16}\ s$? ¿Hacia donde se dirige el contrapeso en ese instante?

(c) ¿Cuándo pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?

Zill 9ª Ed p. 194; 5.1/5

Ejemplo 2: Una masa de 1 kg está unida a un resorte cuya constante es 16 N/m y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Formule las ecuaciones del movimiento si:

(a) El contrapeso se suelta, partiendo del reposo a 1 m abajo de la posición de equilibrio.

(b) El contrapeso se suelta a 1 m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 12 m/s hacia arriba.

Zill 9ª Ed p. 196; 5.1/23

Ejemplo 3: Cuando una masa de 1 slug se cuelga de un resorte, lo estira 2 pies, y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de t=0, se aplica una fuerza externa al sistema, igual a $f(t) = 8sen(4t)$. Formule la ecuación del movimiento si el medio presenta una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

Zill 9ª Ed p. 196; 5.1/31

Ejemplo 4: Determine la carga en el capacitor y la corriente en el circuito en serie RLC si L=5/3 h, R=10 ohms, C=1/30 f, E(t)= 300 V, q(0)=0 C, i(0)=0 A. Calcule la carga máxima en el capacitor.

Ejemplo 5: Calcule la corriente de estado estable en un circuito en serie RLC, si L=1/2 h, R=20 ohms, C=0.001 f, y E(t)=100 sen(60)t , V.

$$R1: \quad x\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{4}; \quad x\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}; \quad x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}; \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}; \quad x\left(\frac{9\pi}{32}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(b) \quad 4 \ pies/s \quad hacia \ abajo \quad ; \quad (c) \quad t=\frac{(2n+1)\pi}{16}, \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

$$R2: \quad (a) \quad x(t)=\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-8t} \quad ; \quad (b) \quad x(t)=-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{5}{3}e^{-8t}$$

$$R3: \quad x(t)=\frac{1}{4}e^{-4t}+te^{-4t}-\frac{1}{4}\cos 4t$$

$$R4: \quad q(t)=10-10e^{-3t}(\cos 3t+sen3t)$$

$$i(t)=60e^{-3t}sen3t \quad ; \quad 10.432\ C$$

$$R5: \quad i_p(t)=4.160sen(60t-0.588)=\frac{45}{13}\sin(60t)-\frac{30}{13}\cos(60t)$$

Nomenclatura para el Sistema Masa – Resorte

$$F(t)\begin{cases} = 0\ ;\ Movimiento\ Libre & \begin{cases} b=0\ ; no\ amortiguado \\ b\neq 0\ ; amortiguado \end{cases} \\ \neq 0\ ; Movimiento\ Forzado & \end{cases}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 182 Zill/Wright - 143 Modelación con Ecuaciones de 2º Orden
Zill/Cullen - 256 Zill/Wright - 197 Definición de Transformada de Laplace

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 11 : Modelación con Ecuaciones de 2º Orden

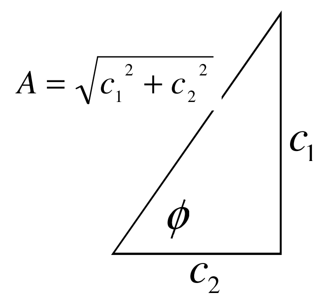
MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 11: Modelación con Ecuaciones de 2º Orden

Antes de empezar a resolver esta tarea bajen de Blackboard y lean el documento: "2.7b Ayudas para Problemas de Aplicaciones" dentro de:
Course Documents / Unidad 2 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

P1: Al fijar un contrapeso de 24 lb al extremo de un resorte, que cuelga verticalmente, lo estira 4 pulg. Deduzca la ecuación del movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 pulg arriba de la posición de equilibrio.

P2: Un contrapeso de 8 lb, fijo a un resorte, tiene un movimiento armónico simple. Deduzca la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 lb/pie y el contrapeso parte de 6 pulg abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de 3/2 pie/s hacia abajo. Exprese la solución en la forma de la ecuación $x(t) = A sen(\omega t + \phi)$. Nota: Utilice la identidad: $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cos\beta + sen\beta \cos\alpha$, y el cambio de variable mostrado en la figura.



P3: Un contrapeso de 4 lb se une a un resorte cuya constante es 2 lb/pie. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el contrapeso se suelta de un punto a 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de 8 pie/s hacia abajo, calcule el tiempo en que pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el momento en que el contrapeso llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio, ¿Cuál es su posición en ese instante?

P4: Una fuerza de 2 lb estira 1 pie un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea. (a) Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 pie arriba de la posición de equilibrio. (b) Exprese la ecuación del movimiento en la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

(c) Calcule el primer momento en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba.

P5: Un contrapeso de 16 lb estira 8/3 pie un resorte. Al principio, el contrapeso parte del reposo a 2 pies debajo de la posición de equilibrio y el movimiento ocurre un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la mitad de la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso está impulsado por una fuerza externa igual a $f(t)=10\cos 3t$.
P6: Cuando una masa de 2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 32 N/m, llega a la posición de equilibrio. A partir de t=0 se aplica al sistema una fuerza igual a $f(t)=68e^{-2t}\cos 4t$. Deduzca la ecuación del movimiento cuando no hay amortiguamiento.
P7: Determine la carga y la corriente de estado estable en un circuito en serie RLC cuando L=1 h, R=2 ohms, C=0.25 f, y E(t)=50 cos(t) V.
P8: Calcule la carga en el condensador de un circuito RLC cuando L=1/2 h, R=10 ohms, C=0.01 f, E(t)=150 V, q(0)=1 C e i(0)=0 A. ¿Cuál es la carga en el condensador cuando ha transcurrido mucho tiempo?

$$R1:\quad x(t)=-\frac{1}{4}\cos\left(4\sqrt{6}t\right)$$

$$R2:\quad x(t)=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{4}sen2t \quad ; \quad x(t)=\frac{\sqrt{13}}{4}sen(2t+0.5880)$$

$$R3:\quad 1/4\ s\ ;\quad 1/2\ s\ ;\quad x\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-2}=0.14$$

$$R4:\quad x(t)=e^{-2t}\left(-\cos 4t-\frac{1}{2}sen4t\right);\quad x(t)=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t}sen(4t+4.249);\quad t=1.294\ s$$

$$R5:\quad x(t)=e^{-t/2}\left(-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t-\frac{64}{3\sqrt{47}}sen\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)+\frac{10}{3}(\cos 3t+sen3t)$$

$$R6:\quad x(t)=\frac{1}{2}\cos 4t+\frac{9}{4}sen4t+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t-2e^{-2t}sen4t$$

$$R7:\quad q_p=\frac{100}{13}sent+\frac{150}{13}\cos t \quad ; \quad i_p=\frac{100}{13}\cos t-\frac{150}{13}sent$$

$$R8:\quad q(t)=-\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t+sen10t)+\frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{3}{2}C$$