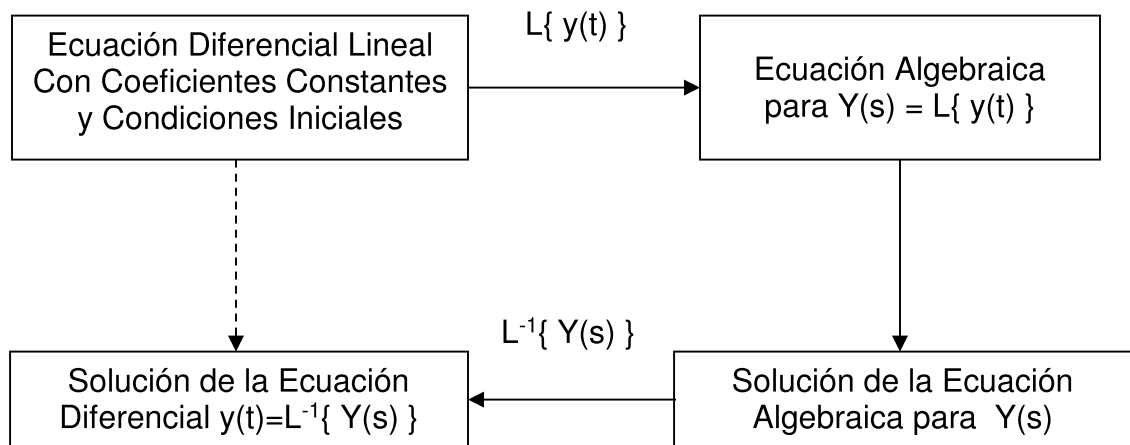


Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.1: Definición de la Transformada de Laplace



Transformación de funciones $f(t)$ a funciones $F(s)$

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$\cos(bt) \rightarrow \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$e^{at} \operatorname{sen}(bt) \rightarrow \frac{b}{(s-a)^2 + a^2}$$

Transformación de operaciones de derivar, de integrar, de multiplicar por t , dividir por t , etc.

$$f(t) \rightarrow F(s)$$

$$f'(t) \rightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^t f(u) du \rightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$t \cdot f(t) \rightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_0^s F(\sigma) d\sigma$$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE					
	f(t)	F(s)		f(t)	F(s)
1	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	16	$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [F(s)]$
2	1	$\frac{1}{s}$	17	$t \cdot \text{sen}(bt)$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	18	$t \cdot \text{cos}(bt)$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	19	$U(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	20	$f(t-a) \cdot U(t-a)$	$e^{-as} \cdot F(s)$
6	$\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	21	$f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
7	$\text{cos}(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	22	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
8	$\text{senh}(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	23	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
9	$\text{cosh}(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	24	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$	
10	$e^{at} \cdot f(t)$	$F(s-a)$	25	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
11	$e^{at} \cdot \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	26	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
12	$e^{at} \cdot \text{cos}(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	27	$f_T(t)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t)e^{-st} dt$
13	$e^{at} \cdot \text{senh}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	28	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(u)du$
14	$e^{at} \cdot \text{cosh}(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$	29	$\delta(t-a)$	e^{-as}
15	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	30	$\delta(t)$	1

Ejemplos de Cálculo de Transformadas de Laplace a partir de la definición:

Cálculo de la Transformada de la función $f(t) = t^n$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \frac{-te^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-1}{s} e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} dt}_{L\{1\}} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t^2\} = \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-st} dt = \frac{-t^2 e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-2t}{s} e^{-st} dt = 0 + \frac{2}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} t e^{-st} dt}_{L\{t\}} = \frac{2}{s^3}$$

$$L\{t^3\} = \int_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-st} dt = \frac{-t^3 e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-3t^2}{s} e^{-st} dt = 0 + \frac{3}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt}_{L\{t^2\}} = \frac{3!}{s^4}$$

$$L\{t^4\} = \int_0^{\infty} t^4 \cdot e^{-st} dt = \frac{-t^4 e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-4t^3}{s} e^{-st} dt = 0 + \frac{4}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} t^3 e^{-st} dt}_{L\{t^3\}} = \frac{4!}{s^5}$$

$$\underline{\underline{L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}}$$

Cálculo de la Transformada de la función exponencial $f(t) = e^{at}$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{(s-a)} [e^{-\infty} - e^0] = \frac{1}{s-a}$$

$$\underline{\underline{L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}}}$$

Cálculo de la Transformada de la función coseno $f(t) = \cos(bt)$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$L\{\cos(t)\} = \int_0^{\infty} \underbrace{\cos(bt)}_u \underbrace{e^{-st}}_{dv} dt = -\frac{\cos(bt)e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \frac{b}{s} \int_0^{\infty} \underbrace{\sin(bt)}_u \underbrace{e^{-st}}_{dv} dt$$

$$L\{\cos(t)\} = \left(0 + \frac{1}{s} \right) - \frac{b}{s} \left[-\frac{\sin(bt)e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{b}{s} \int_0^{\infty} \underbrace{\cos(bt)e^{-st}}_{L\{\cos(bt)\}} dt \right]$$

$$L\{\cos(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{b^2}{s^2} L\{\cos(t)\} \Rightarrow L\{\cos(t)\} + \frac{b^2}{s^2} L\{\cos(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{\cos(t)\} \left(1 + \frac{b^2}{s^2} \right) = \frac{1}{s} \Rightarrow L\{\cos(t)\} \left(\frac{s^2 + b^2}{s^2} \right) = \frac{1}{s} \Rightarrow \underline{\underline{L\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + b^2}}}$$

Cálculo de la Transformada de la función $f(t) = \begin{cases} t & ; 0 < t < 1 \\ 1 & ; 1 < t < 2 \\ 0 & ; 2 < t < \infty \end{cases}$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^{-st}}_{dv} dt + \int_1^2 1e^{-st} dt + \int_2^{\infty} 0e^{-st} dt$$

$$L\{f(t)\} = -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{s} e^{-st} dt + \int_1^2 1e^{-st} dt + 0$$

$$L\{f(t)\} = \left[-\frac{e^{-s}}{s} + 0 \right] + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^1 + \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_1^2 =$$

$$L\{f(t)\} = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-s}}{-s} - \frac{1}{-s} \right] + \left[\frac{e^{-2s}}{-s} - \frac{e^{-s}}{-s} \right]$$

$$L\{f(t)\} = -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}}}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 256 Zill/Wright - 197 Definición de Transformada de Laplace
 Zill/Cullen - 262 Zill/Wright - 202 Transformadas Inversas

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 12 : Definición de la Transformada de Laplace

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS**Tarea No. 12 : Definición de la Transformada de Laplace**

A partir de la definición: $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$, calcule la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

Problemas:

$$P1: f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

$$P2: f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

$$P3: f(t) = e^{-t} \text{sent}$$

$$P4: f(t) = 4t - 10$$

$$P5: f(t) = 1 + e^{4t}$$

$$P6: f(t) = \text{senh}(kt)$$

Respuestas:

$$R1: \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

$$R2: \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

$$R3: \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$R4: \frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$$

$$R5: \frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$$

$$R6: \frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$\text{use } \text{senh}(kt) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$