Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.3: Teoremas de Traslación

Primer Teorema de Traslación	Función Escalón Unitario
$f(t) \Rightarrow F(s)$ $e^{at}f(t) \Rightarrow F(s-a)$	$U(t-a)=\begin{cases}0 & ; \quad 0\le t<a\\ 1 & ; \quad a\le t\le\infty\end{cases}$
Transformada del Escalón Unitario	**Segundo Teorema de Traslación**
$U(t-a) \Rightarrow \frac{1}{s}e^{-as}$	$f(t) \Rightarrow F(s)$ $f(t-a)U(t-a) \Rightarrow e^{-as}F(s)$
Función Impulso Unitario	**Transformada del Impulso Unitario**
$\delta(t-a)=\frac{d}{dt}U(t-a)$	$\delta(t-a) \Rightarrow e^{-as}$

Ejemplos para la clase del 1er Teorema de Traslación:

$E1: \quad L\{e^{at}t^n\}$	$R1: \quad n!/(s-a)^{n+1}$
$E2: \quad L\{e^{at}senbt\}$	$R2: \quad b/\left[(s-a)^2+b^2\right]$
$E3: \quad L\{e^{at}\cosh bt\}$	$R3: \quad (s-a)/\left[(s-a)^2-b^2\right]$
$E4: \quad L^{-1}\left\{\frac{s-7}{s^2+6s+11}\right\}$	$R4: \quad e^{-3t}\cos\sqrt{2}t-\frac{10}{\sqrt{2}}e^{-3t}sen\sqrt{2}t$
$E5: \quad L^{-1}\left\{\frac{7}{(s-1)^3}\right\}$	$R5: \quad \frac{7}{2}t^2e^t$
$E6: \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$	$R6: \quad \frac{1}{3}e^{-t}senh(3t)$

Ejemplos para la clase del 2º Teorema de Traslación:

$E1: \quad L\left\{e^{3(t-2)}U(t-2)\right\}$	$R1: \quad e^{-2s}/(s-3)$
$E2: \quad L\left\{e^{3t}U(t-2)\right\}$	$R2: \quad e^{-2(s-3)}/(s-3)$
$E3: \quad L^{-1}\left\{\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}\right\}$	$R3: \quad \dfrac{1}{3}sen\left[3\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]U\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $= -\dfrac{1}{3}\cos(3t)U\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

Zill/Cullen - 270 Zill/Wright - 210 Teoremas de Traslación
Zill/Cullen - 282 Zill/Wright - 220 Otros Teoremas de Transformadas

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 14 : Teoremas de Traslación

Primer Teorema de Traslación

Primer Teorema de Traslación

$$Si \quad L\{f(t)\} = F(s)$$

$$entonces$$

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

Primer Teorema de Traslación

$$Si \quad f(t) \Rightarrow F(s)$$

$$entonces$$

$$e^{at} f(t) \Rightarrow F(s-a)$$

Demostración:

$$Si \ \ L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} f(t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a) \quad LCQD$$

Ejemplo 1:

$$Si \quad L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$entonces$$

$$L\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Ejemplo 2:

$$Si \quad L\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$entonces$$

$$L\{e^{at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

Ejemplo 3:

$$Si \quad L\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$entonces$$

$$L\{e^{at}\cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

Ejemplo 4:

$$Si \quad L\{\sinh(bt)\} = \frac{b}{s^2-b^2}$$

$$entonces$$

$$L\{e^{at}\sinh(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}$$

Ejemplo 5:

$$Si \quad L\{\cosh(bt)\} = \frac{s}{s^2-b^2}$$

$$entonces$$

$$L\{e^{at}\cosh(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$$

Segundo Teorema de Traslación

Segundo Teorema de Traslación	**Segundo Teorema de Traslación**
$Si \quad L\{f(t)\}=F(s)$ $entonces$ $L\{f(t-a)U(t-a)\}=e^{-as}F(s)$	$Si \quad f(t)\Rightarrow F(s)$ $entonces$ $\underline{f(t-a)U(t-a)\Rightarrow e^{-as}F(s)}$

Demostración:

$$Si \;\; L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=F(s) \quad entonces:$$

$$L\{f(t-a)U(t-a)\}=\int_0^\infty f(t-a)U(t-a)e^{-st}dt=$$

$$=\int_0^a f(t-a)0e^{-(s-a)t}dt+\int_a^\infty \underbrace{f(t-a)e^{-st}}_{u=t-a}dt=0+\int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du=$$

$$=e^{-as}\underbrace{\int_0^\infty f(u)e^{-su}du}_{F(s)}=e^{-as}F(s) \quad LCQD$$

Ejemplo 1:	**Ejemplo 2:**
$Si \quad L\{e^{3t}\}=\frac{1}{s-3}$ $entonces$ $L\{e^{3(t-5)}U(t-5)\}=\frac{e^{-5s}}{s-3}$	$Si \quad L\{e^{3t}\}=\frac{1}{s-3}$ $entonces$ $L\{e^{3t}U(t-5)\}=L\{e^{3(t-5+5)}U(t-5)\}=$ $L\{e^{3(t-5)}e^{15}U(t-5)\}=e^{15}L\{e^{3(t-5)}U(t-5)\}=$ $=e^{15}\frac{e^{-5s}}{s-3}=\frac{e^{-5s=15}}{s-3}=\frac{e^{-5(s-3)}}{(s-3)}$

Ejemplo 3:

$$Si \quad L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$Si \quad L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

entonces

$$L\{(t-5)U(t-5)\} = e^{-5s}\,\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{e^{-5s}}{s^2}$$

$$L\{(t-5)^2 U(t-5)\} = e^{-5s}\,\frac{2}{s^3}$$

$$= \frac{2e^{-5s}}{s^3}$$

Ejemplo 4:

$$Si \quad L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

entonces

$$L\{t^2 U(t-5)\} = L\{(t-5+5)^2 U(t-5)\} =$$

$$L\{[(t-5)^2 + 10(t-5) + 25]U(t-5)\} =$$

$$L\{(t-5)^2 U(t-5)\} + 10L\{(t-5)U(t-5)\} +$$

$$25L\{U(t-5)\} =$$

$$= \frac{2e^{-5s}}{s^3} + 10\frac{e^{-5s}}{s^2} + 25\frac{e^{-5s}}{s}$$

Ejemplo 5:

$$Si \quad L^{-1}\{e^{-st}F(s)\} = f(t-a)U(t-a)$$

entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s-7}\right\} = L^{-1}\left\{e^{-3s}\,\frac{1}{s-7}\right\} =$$

$$= e^{7(t-3)}U(t-3)$$

Ejemplo 6:

$$Si \quad L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)U(t-a)$$

entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+36}\right\} = L^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\frac{s}{s^2+36}\right\} =$$

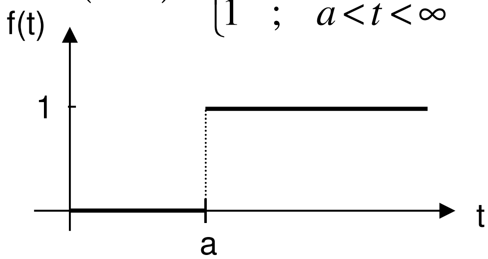
$$= \cos\left[6\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]U\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

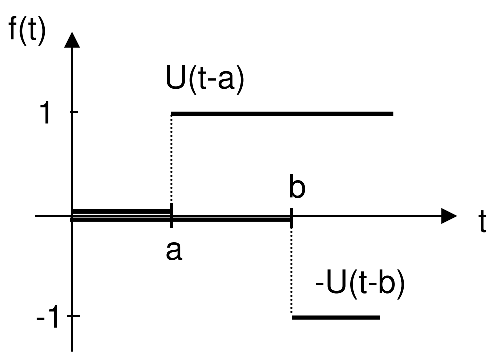
Funciones Seccionalmente Continuas

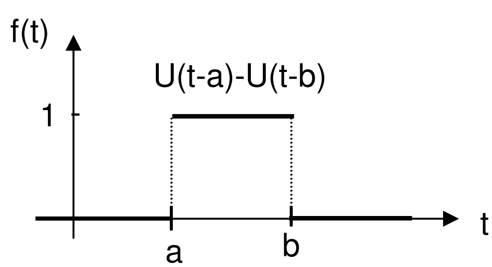
Función Escalón Unitario

$$U(t-a)=\begin{cases}0 & ; \quad 0<t<a \\ 1 & ; \quad a<t<\infty\end{cases}$$

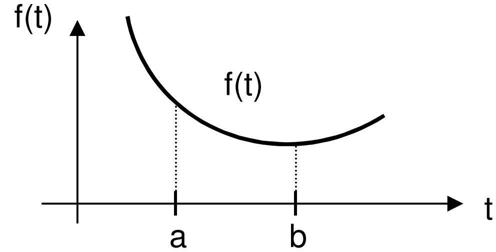


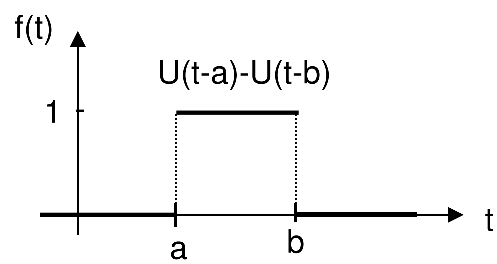
Función Pulso Rectangular

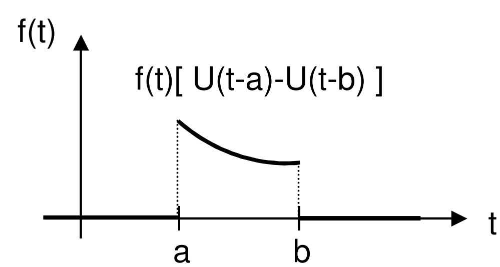




Obteniendo una sección de una función



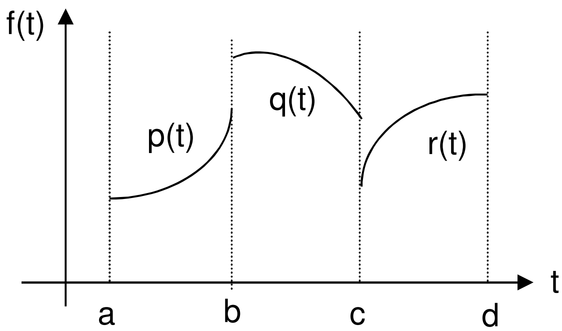




$$\delta(t-a)=0 \quad si \quad t\neq a \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)\,dt=1$$

$$\frac{d}{dt}U(t-a)=\delta(t-a)$$

Gráfica de una Función Seccionalmente Continua



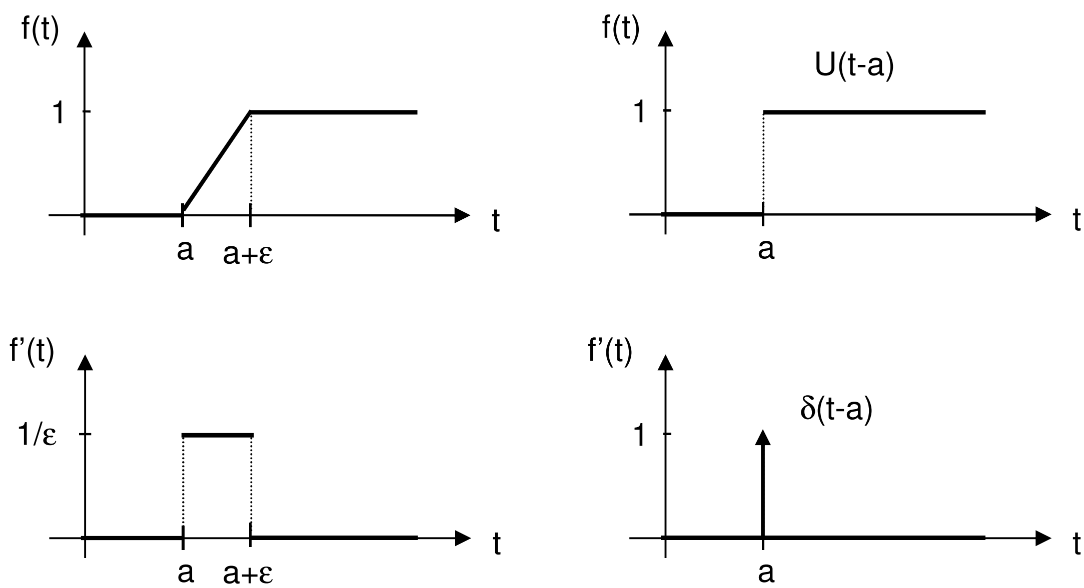
Ecuaciones de una Función Seccionalmente Continua

$$f(t)=\begin{cases} p(t) & ; \quad a<t<b \\ q(t) & ; \quad b<t<c \\ r(t) & ; \quad c<t<d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t)= {} & p(t)[U(t-a)-U(t-b)] \\ & +q(t)[U(t-b)-U(t-c)] \\ & +r(t)[U(t-c)-U(t-d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t)= {} & p(t)U(t-a) \\ & +[q(t)-p(t)]U(t-b) \\ & +[r(t)-q(t)]U(t-c) \\ & -r(t)U(t-d) \end{aligned}$$

Funciones Escalón e Impulso Unitario



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$$

$$L\{\delta(t-a)\}=L\left\{\frac{d}{dt}U(t-a)\right\}=s\left(\frac{e^{-as}}{s}\right)-U(0)=e^{-as}$$

$$\underline{\underline{L\{\delta(t-a)\}=e^{-as}}} \quad ; \quad \underline{\underline{L\{\delta(t)\}=1}}$$

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 14: Teoremas de Traslación

En los siguientes problemas calcule las Transformadas o Transformadas Inversas indicadas.

$$P1: \quad L\{e^{5t} senh(3t)\}$$

$$P2: \quad L\left\{t\left(e^{t}+e^{2t}\right)^2\right\}$$

$$P3: \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+10}\right\}$$

$$P4: \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+20}\right\}$$

$$P5: \quad L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$$

$$P6: \quad L\{tU(t-2)\}$$

$$P7: \quad L\{\cos(2t)U(t-\pi)\}$$

$$P8: \quad L\left\{(t-1)^3 e^{t-1}U(t-1)\right\}$$

$$P9: \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$$

$$P10: \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$$

Respuestas

$$R1: \quad \frac{3}{(s-5)^2-9}$$

$$R2: \quad \frac{1}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-4)^2}$$

$$R3: \quad e^{3t} sent$$

$$R4: \quad e^{-2t}\cos 4t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 4t$$

$$R5: \quad 5-t-5e^{-t}-4te^{-t}-\frac{3}{2}t^2e^{-t}$$

$$R6: \quad \frac{e^{-2s}}{s^2}+2\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$R7: \quad \frac{s}{s^2+4}e^{-\pi s}$$

$$R8: \quad \frac{6e^{-s}}{(s-1)^4}$$

$$R9: \quad -sentU(t-\pi)$$

$$R10: \quad U(t-1)-e^{-(t-1)}U(t-1)$$