

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.4: Otros Teoremas de Transformadas

<p style="text-align: center;">Derivada de una Transformada</p> $f(t) \Rightarrow F(s)$ $t^n f(t) \Rightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	<p style="text-align: center;">Transformada de una Derivada</p> $f(t) \Rightarrow F(s)$ $f^{(n)}(t) \Rightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0)$ $\dots - s^2 f^{(n-3)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
<p style="text-align: center;">Definición de Convulación</p> $f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du =$ $= g(t) * f(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)du$	<p style="text-align: center;">Teorema de Convulación</p> $f(t) \Rightarrow F(s)$ $g(t) \Rightarrow G(s)$ $f(t) * g(t) \Rightarrow F(s)G(s)$
<p style="text-align: center;">Transformada de una Integral</p> $f(t) \Rightarrow F(s)$ $\int_0^t f(u)du \Rightarrow \frac{1}{s} F(s)$	<p style="text-align: center;">Transformada de una Función Periódica</p> $f_T(t) \Rightarrow \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$
<p>Ejemplos para la clase del Teorema de la Derivada de una Transformada:</p>	
<p>E1: $L\{t \operatorname{sen}(3t)\}$</p> <p>E2: $L\{te^{-3t} \cos(4t)\}$</p> <p>E3: $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-3}{s^2+16}\right)\right\}$</p>	<p>R1: $\frac{6s}{(s^2+9)^2}$</p> <p>R2: $(s^2+6s-7)/(s^2+6s+25)^2$</p> <p>R3: $(2\cos(4t) - e^{3t})/t$</p>

<p>Definición de Convolución. La convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ está definida como:</p> $f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$ <p>La convolución es conmutativa, esto es:</p> $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$	<p>Teorema de Convolución:</p> <p>Si $L\{f(t)\} = F(s)$ y $L\{g(t)\} = G(s)$ entonces</p> $L\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s) \quad \text{y también}$ $L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$
<p>Ejemplo 1. Cálculo de $t^3 * t^2$</p> $t^3 * t^2 = \int_0^t u^3(t-u)^2 du =$ $= \int_0^t u^3(t^2 - 2tu + u^2) du =$ $= \int_0^t (u^3t^2 - 2tu^4 + u^5) du =$ $= \left[\frac{u^4t^2}{4} - 2\frac{tu^5}{5} + \frac{u^6}{6} \right]_0^t = \frac{t^6}{4} - \frac{2t^6}{5} + \frac{t^6}{6}$ $= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) t^6 = \left(\frac{15 - 24 + 10}{60} \right) t^6 =$ $\therefore t^3 * t^2 = \frac{t^6}{60}$	<p>Ejemplo 3.</p> <p>Calcular $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}$</p> $\frac{1}{(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-3}$ $1 = A(s-3) + B(s+2)$ <p>en $s = -2 \Rightarrow A = -1/5$</p> <p>en $s = +3 \Rightarrow B = +1/5$</p> $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\} = \frac{1}{5} L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\}$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\} = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$
<p>Ejemplo 2. Cálculo de $e^{-2t} * e^{3t}$</p> $e^{-2t} * e^{3t} = \int_0^t e^{-2u} e^{3(t-u)} du =$ $= \int_0^t e^{-2u} e^{3t} e^{-3u} du = e^{3t} \int_0^t e^{-5u} du =$ $= e^{3t} \left[\frac{e^{-5u}}{-5} \right]_0^t = \frac{-e^{3t}}{5} (e^{-5t} - 1) = \frac{e^{3t}}{5} - \frac{e^{-2t}}{5}$ $\therefore e^{-2t} * e^{3t} = \frac{1}{5} (e^{3t} - e^{-2t})$	<p>Ejemplo 4.</p> <p>Calcular $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}$</p> $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)} \cdot \frac{1}{(s-3)}\right\}$ $= e^{-2t} * e^{3t} = \frac{e^{3t}}{5} - \frac{e^{-2t}}{5}$ $\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\} = \frac{e^{3t}}{5} - \frac{e^{-2t}}{5}$

Ejemplos para la clase de la Definición de Convolución, el Teorema de Convolución, y del Teorema de la Transformada de una Integral

$$E1: t^3 * t^2$$

$$E2: e^{2t} * e^{3t}$$

$$E3: L\{e^{2t} * e^{3t}\}$$

$$E4: L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}$$

$$E5: L\left\{\int_0^t \cos u \, du\right\}$$

$$E6: L\left\{\int_0^t u e^{t-u} \, du\right\}$$

$$R1: t^6/60$$

$$R2: e^{3t} - e^{2t}$$

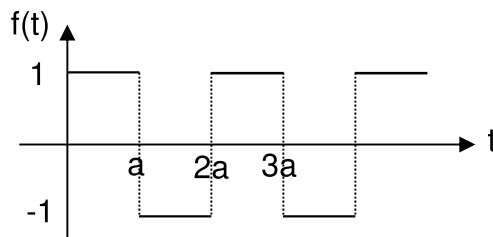
$$R3: 1/(s^2 - 5s + 6)$$

$$R4: e^{3t} - e^{2t}$$

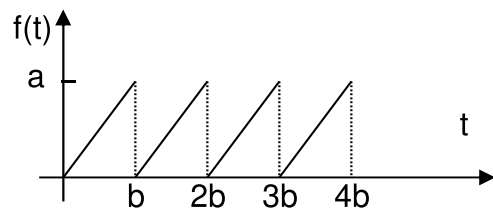
$$R5: \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$R6: \frac{1}{s^2(s-1)}$$

Ejemplos para la clase del Teorema de la Transformada de una Función Periódica



$$\frac{(1 - e^{-as})^2}{s(1 - e^{-2as})} = \frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$$



$$\frac{a}{s} \left(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs} - 1} \right)$$

Unidad 3 : Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.4 : Otros Teoremas de Transformadas

Teorema de la Transformada de una Integral

Si $L\{f(t)\}=F(s)$

entonces

$$L\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}=\int_s^\infty F(u) du$$

Si $f(t)\rightarrow F(s)$

entonces

$$\frac{1}{t}f(t)\rightarrow\int_s^\infty F(u) du$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u) du &= \int_s^\infty \underbrace{\left[\int_0^\infty f(t)e^{-ut} dt\right]}_{F(u)} du = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty f(t)e^{-ut} du\right] dt = \\ &= \int_0^\infty \left[f(t)\int_s^\infty e^{-ut} du\right] dt = \int_0^\infty \left[f(t)\left[\frac{e^{-ut}}{-t}\right]_{u=s}^{u=\infty}\right] dt = \int_0^\infty \left[f(t)\left[0 + \frac{e^{-st}}{t}\right]\right] dt = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{f(t)}{t}\right] e^{-st} dt = L\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} \quad L.C.Q.D.\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}L\left\{\frac{\operatorname{sen}(4t)}{t}\right\} &= \int_s^\infty \frac{4}{u^2+16} du = 4\left[\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{u}{4}\right)\right]_{u=s}^{u=\infty} = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}\left(\frac{s}{4}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{4}\right) = \underline{\underline{\tan^{-1}\left(\frac{4}{s}\right)}}\end{aligned}$$

el último paso es por la identidad trigonométrica:

$$\underline{\underline{\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}} + \underline{\underline{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}} = \frac{\pi}{2}$$

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Demostración del Teorema de la Transformada de una Función Periódica

Si tenemos una función $f_T(t)$ que se repite periódicamente cada vez que t se incrementa en T unidades, decimos que $f_T(t)$ es una función periódica de período T , y se representa simbólicamente como: $f(t+nT) = f_T(T)$.

La transformada de Laplace de esta función la podemos calcular como:

Si $f_T(t)$ es una función periódica con periodo T , esto es:

$f(t + nT) = f(t)$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ entonces:

$$\begin{aligned}
 L\{f_T(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \\
 &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} f(t) e^{-st} dt + \int_{3T}^{4T} f(t) e^{-st} dt + \dots \\
 &\quad u = t \qquad u = t - T \qquad u = t - 2T \qquad u = t - 3T \\
 &= \int_0^T f(u) e^{-su} du + \int_0^T f(u+T) e^{-s(u+T)} du + \int_0^T f(u+2T) e^{-s(u+2T)} du + \dots \\
 &= \int_0^T f(u) e^{-su} du + e^{-sT} \int_0^T f(u) e^{-su} du + e^{-2sT} \int_0^T f(u) e^{-su} du + e^{-3sT} \int_0^T f(u) e^{-su} du + \dots \\
 &= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + e^{-4sT} + \dots) \int_0^T f(u) e^{-su} du \\
 &= (1 + e^{-sT} + (e^{-sT})^2 + (e^{-sT})^3 + (e^{-sT})^4 + \dots) \int_0^T f(t) e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad \therefore \\
 \underline{\underline{L\{f_T(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt}}
 \end{aligned}$$

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 15: Otros Teoremas de Transformadas

Resuelva los siguientes problemas

$$P1: L\{t \cos(2t)\}$$

$$P2: L\{t^2 \sinh(t)\}$$

$$P3: L\{te^{2t} \sin(6t)\}$$

$$P4: L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-3}{s+1}\right)\right\}$$

$$P5: L\left\{\int_0^t e^{-u} \cos u \, du\right\}$$

$$P6: L\left\{\int_0^t u^3 e^{t-u} \, du\right\}$$

Use el Teorema de Convención

No use Fracciones Parciales

$$P7: L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

$$P8: L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$$

$$R1: (s^2 - 4)/(s^2 + 4)^2$$

$$R2: (6s^2 + 2)/(s^2 - 1)^3$$

$$R3: (12s - 24)/[(s - 2)^2 + 36]^2$$

$$R4: \frac{e^{-t} - e^{3t}}{t}$$

$$R5: \frac{s+1}{s[(s+1)^2 + 1]}$$

$$R6: \frac{6}{s^4(s-1)}$$

$$R7: 1 - e^{-t}$$

$$R8: -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$