

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.6: La Función de Transferencia y el Enfoque de Sistemas

Un sistema lineal, como un circuito eléctrico RLC, un sistema mecánico bloque-resorte-amortiguador, un sistema hidráulico, etc., puede representarse o modelarse mediante una ecuación diferencial lineal de 2º orden, con coeficientes constantes, como la siguiente:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad ; \quad y(0) = k_1 \quad ; \quad y'(0) = k_2$$

con solución dada por: $y = f(t)$

Al resolver este problema de valor de inicial utilizando el Método de la Transformada de Laplace, obtenemos:

$$a(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = G(s)$$

$$a(s^2Y(s) - sk_1 - k_2) + b(sY(s) - k_1) + cY(s) = G(s)$$

$$as^2Y(s) + bY(s) + cY(s) - ask_1 - ak_2 - bk_1 = G(s)$$

Rearreglando los términos de esta ecuación al factorizar Y(s), y al despejar esta función obtenemos:

$$Y(s)[as^2 + bs + c] = [ask_1 + ak_2 + bk_1] + G(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{[ask_1 + ak_2 + bk_1]}{[as^2 + bs + c]}}_{Y_h(s)} + \underbrace{\frac{G(s)}{[as^2 + bs + c]}}_{Y_p(s)}$$

en donde:

$Y_h(s)$ = TL de la solución homogénea o solución transitoria

$Y_p(s)$ = TL de la solución particular o solución de estado estable

Función de Transferencia $H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$

Función Respuesta a un Impulso $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$

$$Y(s) = Y_h(s) + Y_p(s) = Y_h(s) + G(s)H(s)$$

$$y(t) = y_h(t) + g(t) * h(t) = y_h(t) + \int_0^t h(t-v)g(v)dv$$

En el caso de que las condiciones iniciales sean ambas cero, $k_1 = k_2 = 0$, la solución homogénea o transitoria, será nula, y la solución total será la solución particular, o de estado estable, y tendremos que:

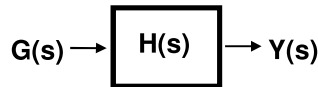
Ya que $H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$ tenemos que:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c} = \left[\frac{1}{as^2 + bs + c} \right] \cdot G(s) = H(s)G(s)$$

y obtenemos que: $Y(s) = H(s) \cdot G(s)$

o en palabras: *Salida = Transferencia · Entrada*

o también como: *Re respuesta = Transferencia · Excitación*



Cuando a un sistema lineal se le aplica como excitación o señal de entrada un impulso unitario, la respuesta del sistema, o señal de salida, es precisamente la Función Respuesta a un Impulso, cuya Transformada de Laplace nos da la Función de Transferencia, la cual a su vez nos indica el valor de los elementos pasivos del sistema representados por las constantes a, b y c.

Si $g(t) = \delta(t)$ entonces $G(s) = L\{\delta(t)\} = 1$

y la respuesta del sistema será:

$$Y(s) = H(s)G(s) = H(s) \rightarrow \underline{y(t) = h(t)}$$

Por lo tanto podemos determinar la Función de Transferencia, de “una caja negra” alimentándole un impulso unitario y sacándole Transformada de Laplace a la Función Respuesta a un Impulso que obtengamos a la salida del sistema.