

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.7: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$2x' + y' - y = t$$

$$x' + y' = t^2$$

$$x(0) = 1; y(0) = 0$$

Sacamos Transformada de Laplace a las dos ecuaciones y tenemos que:

$$2[sX(s) - x(0)] + sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$2sX(s) + (s-1)Y(s) = 2 + \frac{1}{s^2} \quad \dots [1]$$

$$sX(s) + sY(s) = 1 + \frac{2}{s^3} \quad \dots [2]$$

Multiplicando la ecuación [2] por -2 y sumándole la ecuación [1] tenemos:

$$(-s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

$$(s+1)Y(s) = \frac{4-s}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales tenemos:

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

Y sacando Transformada Inversa de Laplace:

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}$$

Regresando a la ecuación [1] y sacándole Transformada de Laplace tenemos:

$$sX(s) = -sY(s) + 1 + \frac{2}{s^3}$$

$$L\{X(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}\}$$

$$x(t) = -(5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}) + 1 + \frac{2}{3!}t^3$$

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + \frac{1}{3}t^3$$

Y poniendo juntas las dos soluciones tenemos como respuesta del sistema de ecuaciones diferenciales:

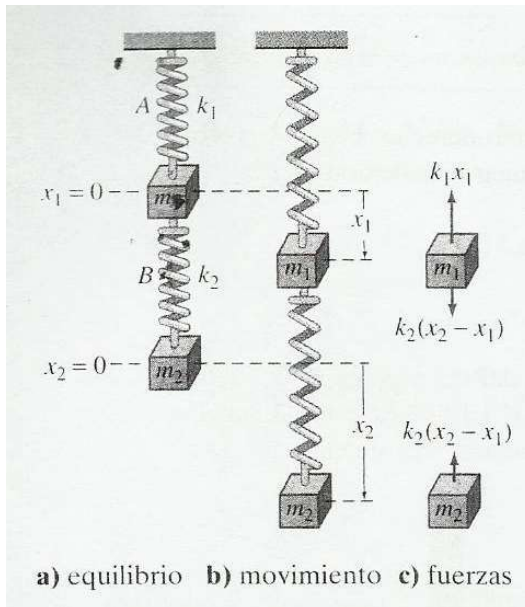
$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + \frac{1}{3}t^3$$

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}$$

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.7: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo 2: Resortes Acoplados.



Inicialmente se encuentra un bloque de masa m_1 suspendido verticalmente de un resorte de constante elástica k_1 , y de él se suspende un segundo bloque de masa m_2 mediante un segundo resorte de constante elástica k_2 , y los dos bloques se encuentran inicialmente en reposo en sus posiciones de equilibrio.

Llamemos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a los desplazamientos verticales de las masas de sus posiciones de equilibrio. Cuando el sistema está en movimiento el primer resorte experimenta una fuerza $-k_1 x_1$ y el segundo resorte $k_2 (x_2 - x_1)$, y de acuerdo a la 2ª Ley de Newton tenemos que:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

Y la fuerza experimentada por el segundo bloque se debe solo al alargamiento del segundo resorte:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1)$$

El movimiento del sistema acoplado se representa por el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Ahora resolvemos este problema con los valores $k_1=6$, $k_2=4$, $m_1=1$, $m_2=1$ y las masas empiezan desde sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias opuestas

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2'(0) = -1,$$

Obteniendo el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'' + 10x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2'' - 4x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sacando Transformada de Laplace a las dos ecuaciones obtenemos:

$$s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0) + 10 X_1(s) - 4 X_2(s) = 0$$

$$s^2 X_2(s) - s x_2(0) - x_2'(0) - 4 X_1(s) + 4 X_2(s) = 0$$

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.7: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Sustituyendo condiciones iniciales:

$$(s^2 + 10)X_1(s) - 4X_2(s) = 1$$

$$(s^2 + 4)X_2(s) - 4X_1(s) = -1$$

Resolviendo para X_1 y sacando fracciones parciales tenemos que:

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{-1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12}$$

Y sacando Transformada Inversa:

$$x_1(t) = \frac{-\sqrt{2}}{10} \text{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{5} \text{sen}(2\sqrt{3}t)$$

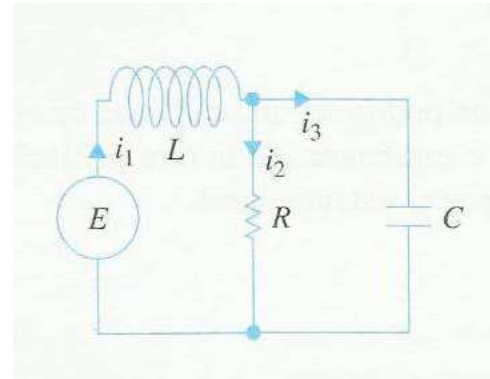
Sustituyendo la expresión para $X_1(s)$ en la primera ecuación, y sacando fracciones parciales, tenemos:

$$X_2(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{-2/5}{s^2 + 2} + \frac{-3/5}{s^2 + 12}$$

Y sacando Transformada Inversa:

$$x_2(t) = \frac{-\sqrt{2}}{5} \text{sen}(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{10} \text{sen}(2\sqrt{3}t)$$

Ejemplo 3: Circuitos Acoplados.



De acuerdo a la 1ª Ley de Kirchhoff:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

Y de acuerdo a la 2ª Ley de Kirchhoff:

$$E(t) = L \frac{di_1}{dt} + Ri_2$$

$$RC \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

Usando los valores $E(t)=60$ V; $L=1$ h; $R=50$ ohm; $C=10^{-4}$ f, y al inicio i_1 e i_2 son cero, tenemos:

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60$$

$$50(10^{-4}) \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

Aplicando la Transformada tenemos:

$$sI_1(s) + 50I_2(s) = \frac{60}{s}$$

$$(s + 200)I_2(s) - 200I_1(s) = 0$$

Unidad 3: Método de la Transformada de Laplace

Tema 3.7: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Resolviendo el sistema para I_1 e I_2 tenemos:

$$I_1(s) = \frac{60s + 12000}{s(s+100)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{12000}{s(s+100)^2}$$

Y descomponiendo en fracciones parciales tenemos:

$$I_1(s) = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

Y tomando la Transformada Inversa tenemos:

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

MA1035 : MODELACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Tarea No. 17 : Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Resuelva los siguientes Sistemas de Ecuaciones Diferenciales usando la Transformada de Laplace.

Ejercicio 1:

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 2x \quad ; \quad x(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 1$$

Ejercicio 2:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 5x - y$$

$$x(0) = -1 \quad ; \quad y(0) = 2$$

Ejercicio 3:

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1 \quad ; \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$$

$$x(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0$$

Ejercicio 4:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0$$

$$x(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad x'(0) = -2 \quad ; \quad y'(0) = 1$$

Ejercicio 5:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t$$

$$x(0) = 8 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad x'(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

Ejercicio 6:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0 \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}$$

$$x(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad x'(0) = 2$$

Respuesta 1:

$$x = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t \quad ; \quad y = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$$

Respuesta 2:

$$x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t \quad ; \quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t$$

Respuesta 3:

$$x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}$$

Respuesta 4:

$$x = -\frac{t}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin\sqrt{2}t \quad ; \quad y = -\frac{t}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin\sqrt{2}t$$

Respuesta 5:

$$x = 8 + \frac{2t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \quad ; \quad y = \frac{-2t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$$

Respuesta 6:

$$x = \frac{t^2}{2} + t + 1 - e^{-t} \quad ; \quad y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$$