

Unidad 4: Métodos Numéricos

Tema 4.1: Método de Euler

Recordando el desarrollo de una función en una serie de potencias de Taylor, tenemos que:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + c_4(x - x_0)^4 + \dots \quad ; \quad c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots$$

y cambiándole de nombre a la función $f(x)$ por $y(x)$ tenemos que:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{y''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{y'''(x_0)}{3!} + \dots$$

tomando la aproximación de 1er orden tenemos que:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0)$$

Consideremos ahora la solución del problema de valor inicial de 1er orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = x_0$$

combinando esta ecuación con la aproximación de Taylor de 1er orden tenemos:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) \\ y(x_2) &= y(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_1, y_1) \\ y(x_3) &= y(x_2) + (x_3 - x_2)f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

y simplificando la nomenclatura obtenemos que:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \quad ; \quad x_1 = x_0 + h \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \quad ; \quad x_2 = x_1 + h \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \quad ; \quad x_3 = x_2 + h \\ \underline{y_{n+1}} &= \underline{y_n + hf(x_n, y_n)} \quad ; \quad \underline{x_{n+1}} = \underline{x_n + h} \end{aligned}$$

Ejemplo del Método de Euler

	$y' = \frac{dy}{dx} = 2xy$	$y(1.00) = 1.00$	$h = 0.10$
n	$x_{n+1} = x_n + h$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$	$y' = f(x_n, y_n) = 2x_n y_n$
0	$x_0 = \underline{1.00}$	$y_0 = \underline{1.0000}$	$y' = f(x_0, y_0) = 2x_0 y_0$
			$f(1.00, 1.0000) = 2(1.00)(1.0000) = \underline{2.0000}$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$	$y' = f(x_1, y_1) = 2x_1 y_1$
	$1.00 + 0.10 = \underline{1.10}$	$1.0000 + 0.1(2.0000) = \underline{1.2000}$	$f(1.10, 1.2000) = 2(1.10)(1.2000) = \underline{2.6400}$
2	$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$	$y' = f(x_2, y_2) = 2x_2 y_2$
	$1.10 + 0.10 = \underline{1.20}$	$1.2000 + 0.1(2.6400) = \underline{1.4640}$	$f(1.20, 1.4640) = 2(1.20)(1.4640) = \underline{3.5136}$
3	$x_3 = x_2 + h$	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$	$y' = f(x_3, y_3) = 2x_3 y_3$
	$1.20 + 0.10 = \underline{1.30}$	$1.464 + 0.1(3.5136) = \underline{1.8154}$	$f(1.30, 1.8154) = 2(1.30)(1.8154) = \underline{4.7199}$
4	$x_4 = x_3 + h$	$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$	$y' = f(x_4, y_4) = 2x_4 y_4$
	$1.30 + 0.10 = \underline{1.40}$	$1.8154 + 0.1(4.7199) = \underline{2.2874}$	$f(1.40, 2.2874) = 2(1.40)(2.2874) = \underline{6.4046}$
5	$x_5 = x_4 + h$	$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4)$	$y' = f(x_5, y_5) = 2x_5 y_5$
	$1.40 + 0.10 = \underline{1.50}$	$2.2874 + 0.1(6.4046) = \underline{2.9278}$	$f(1.50, 2.9278) = 2(1.50)(2.9278) = \underline{8.7834}$

Ejemplo de solución de una ecuación Diferencial de 1er Orden, a partir de una condición inicial dada, por el Método de Euler para encontrar una curva solución

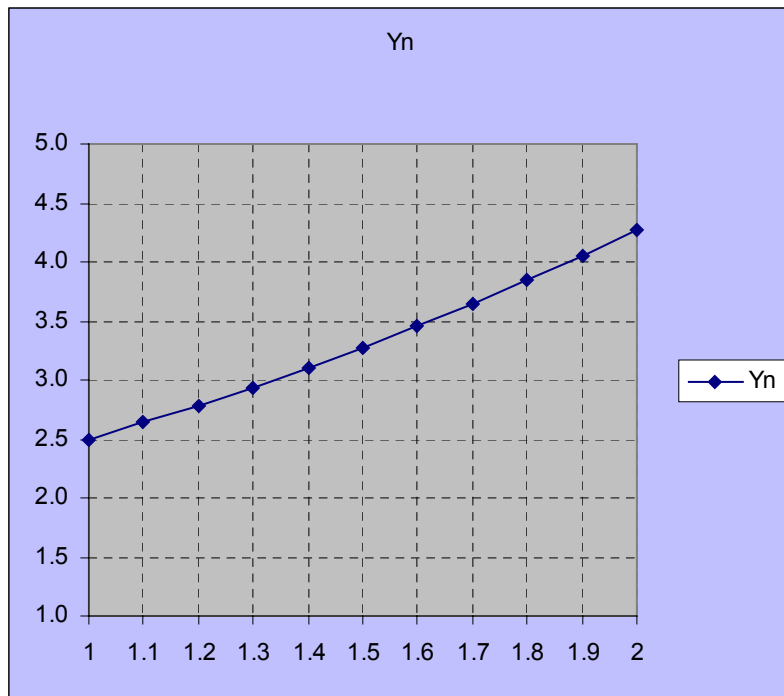
$$y' = \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad y(1) = 2.5$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

n	Xn	Yn	f(Xn,Yn)
0	1	2.5000	1.3572
1	1.1	2.6357	1.4488
2	1.2	2.7806	1.5404
3	1.3	2.9346	1.6324
4	1.4	3.0979	1.7249
5	1.5	3.2704	1.8179
6	1.6	3.4522	1.9117
7	1.7	3.6433	2.0063
8	1.8	3.8440	2.1017
9	1.9	4.0541	2.1979
10	2	4.2739	2.2950

Xo 1
 Yo 2.5
 h 0.1
 f(Xn,Yn)



Ejemplos para la clase:

Use el método de Euler con $h=0.1$ para obtener una aproximación, con cuatro decimales, al valor indicado en los siguientes problemas de valor inicial

$y' = 2x - 3y + 1$ $y(1) = 5$ $y(1.5) = ?$	$y' = 1 + y^2$ $y(0) = 0$ $y(0.5) = ?$	$y' = (x - y)^2$ $y(0) = 0.5$ $y(0.5) = ?$	$y' = xy^2 - \frac{y}{x}$ $y(1) = 1$ $y(1.5) = ?$
--------------------------------------------------	----------------------------------------------	--------------------------------------------------	---------------------------------------------------------

Respuestas

x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
1.00	5.0000	0.00	0.0000	0.00	0.5000	1.00	1.0000
1.10	3.9900	0.10	0.1005	0.10	0.5215	1.10	1.0095
1.20	3.2545	0.20	0.2030	0.20	0.5362	1.20	1.0404
1.30	2.7236	0.30	0.3098	0.30	0.5449	1.30	1.0967
1.40	2.3451	0.40	0.4234	0.40	0.5490	1.40	1.1866
1.50	2.0801	0.50	0.5470	0.50	0.5503	1.50	1.3260