UNIDAD 1 : CONCEPTOS PRELIMINARES

Tema 1.2 : Ecuaciones Paramétricas de Curvas en el Plano

(Estudiar la Sección 10.1 en el Stewart 8ª Edición y hacer la Tarea No. 2)

Ecuaciones Paramétricas de una Curva Plana. Ilustrar el proceso de eliminación del parámetro para obtener la ecuación cartesiana de la curva, y el proceso inverso de parametrización de una ecuación cartesiana para obtener las ecuaciones paramétricas de la curva.

Ecuaciones Paramétricas del Segmento Dirigido de curva	$\left.\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = h(t) \end{array}\right\}$ $a \le t \le b$	$\leftrightarrow$ $y = f(x)$	Ecuación Cartesiana de la curva

Ejemplos: (a) Hacer una tabla de valores, (b) dibujar la curva, describiendo el sentido en que se recorre la curva al aumentar el valor del parámetro, (c) eliminar el parámetro para obtener la ecuación cartesiana, (d) reconocer el tipo de curva, y (e) ponerla la ecuación cartesiana en la forma estándar, para las ecuaciones paramétricas siguientes:

Ejemplo 1 $x = t^2 - 2t$ $y = t + 1$ $-2 \le t \le 4$	$\begin{array}{ccc} t & x & y \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{array}$	$x = (y-1)^2 - 2(y-1)$ $x = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2$ $x = y^2 - 4y + 3$ $x = y^2 - 4y + 4 - 1$ $x + 1 = (y-2)^2$ *parábola horizontal con su vértice en* $(-1,2)$	Se recorre solo el segmento de la parábola que inicia en el punto (8,-1) y termina en el punto (8,5)
Ejemplo 2 $x = 3 + 2\cos\theta$ $y = 2 + 3sen\theta$ $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$\begin{array}{ccc} \theta & x & y \\ -\pi/2 & 3 & -1 \\ -\pi/4 & 4.4 & -0.1 \\ 0 & 5 & 2 \\ \pi/4 & 4.4 & 4.1 \\ \pi/2 & 3 & 5 \end{array}$	$\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$ $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1$ $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ *elipse con centro en* $(3,2)$ *y semiejes* $a = 2 \quad , \quad b = 3$	Se recorre solo la mitad derecha de la elipse, empezando en el punto (3,-1), pasando por el punto (5,2), y terminando en el punto (3,5)

<table>
<tr>
<td><u>Ejemplo 3</u>
$y = 4 - \cos^2\theta$
$x = \cos\theta$</td>
<td rowspan="2">$\begin{array}{ccc} \theta & x & y \\ 0 & 1 & 3 \\ \pi/2 & 0 & 4 \\ \pi & -1 & 3 \\ 3\pi/2 & 0 & 4 \\ 2\pi & 1 & 3 \end{array}$</td>
<td rowspan="2">$y = 4 - \cos^2\theta$
$y = 4 - (\cos\theta)^2$
$y = 4 - x^2$
parábola vertical
ramas hacia abajo</td>
<td rowspan="2">Las ecuaciones describen una partícula oscilando indefinidamente sobre un arco de parábola de los puntos (1,3) pasando por (0,4), llegando hasta el punto (-1,3) y regresando a los puntos (0,4) y luego a (1,3) y así sucesivamente</td>
</tr>
<tr>
<td>$-1 \le \cos\theta \le 1 \quad \therefore$
$-1 \le x \le 1$
$0 \le \cos^2\theta \le 1$
$3 \le y \le 4$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Proceso de Eliminar el Parámetro
→ → → →</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Ecuaciones Paramétricas del segmento dirigido de curva</td>
<td>$\left.\begin{array}{r} x = g(t) \\ y = h(t) \end{array}\right\} \quad \leftrightarrow \quad y = f(x)$
$a \le t \le b$</td>
<td>Ecuación Cartesiana de la curva</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>← ← ← ←
Proceso de Parametrizar la Ecuación Cartesiana</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Resumen de las Ecuaciones Paramétricas de una Curva Plana Ecuaciones Paramétricas (Secciones 10.1 y 10.2 del Stewart 8ª edición)		
Uso de las ecuaciones paramétricas de una curva plana, para calcular pendientes, áreas debajo de la curva, y longitudes de arco; comparado con el uso de la ecuación cartesiana correspondiente		
	Representación de una Curva Plana con una Ecuación Cartesiana	Representación de una Curva Plana con Ecuaciones Paramétricas
Ecuación o Ecuaciones de un segmento de curva	$y = F(x)$ $a \le x \le b$	$x = f(t)$ $y = g(t)$ $c \le t \le d$ $a = f(c) \quad ; \quad b = f(d)$
Pendiente en un punto (x_0,y_0)	$\left.\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\|_{x=x_0}$	$\left.\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\|_{x=x_0} = \left.\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right\|_{t=t_0}$
Area debajo de un segmento de la curva	$A = \int_a^b F(x)dx$	$A = \int_c^d g(t)f'(t)dt$
Diferencial de Arco	$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$	$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$
Longitud de Arco de un segmento de la curva	$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$	$s = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III Tarea No 2: Curvas Paramétricas		
En los problemas 1,2 y 3: (a) Dibuje la curva usando las ecuaciones paramétricas para graficar los puntos. Indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva al aumentar "t" (b) Elimine al parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva		
	Problema	Respuesta
1	$x = 2t + 4\ ;\ y = t - 1$	$y = \frac{x}{2} - 3$
2	$x = 1 - 2t \quad ; \quad y = t^2 + 4 \quad ; \quad 0 \le t \le 3$	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{17}{4} \quad ; \quad -5 \le x \le 1$
3	$x = \sqrt{t} \quad , \quad y = 1 - t$	$y = 1 - x^2 \quad ; \quad x \ge 0$
En los problemas 4,5 y 6: (a) Elimine el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva (b) Dibuje la curva e indique con una flecha la dirección en que se traza la curva al aumentar el parámetro		
4	$x = sen^2\theta \quad ; \quad y = \cos^2\theta$	$x + y = 1 \quad ; \ 0 \le x \le 1$
5	$x = e^t \quad ; \quad y = e^{-t}$	$y = \frac{1}{x} \quad ; \quad 0 < x$
6	$x = \cosh(t) \quad ; \quad y = senh(t)$	$x^2 - y^2 = 1 \quad ; \quad x \ge 1$
En los problemas 7 y 8 describa el movimiento de la partícula con posición (x,y) conforme t varía en el intervalo dado:		
7	$x = \cos(\pi\, t) \quad ; \quad y = sen(\pi\, t) \quad ; \quad 1 \le t \le 2$	Se mueve en contra del reloj sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde (-1,0) hasta (1,0) pasando por (0,-1)
8	$x = 2sen(t) \quad ; \quad y = 3\cos(t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$	Se mueve una vez a favor del reloj sobre la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, empezando y terminando en (0,3)