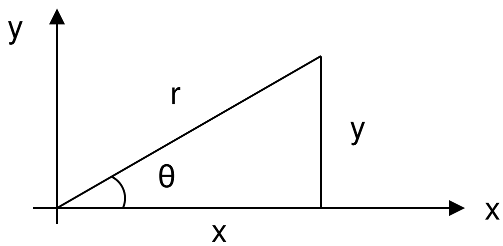
UNIDAD 1 : CONCEPTOS PRELIMINARES

Tema 1.3 : Ecuaciones de Curvas en Coordenadas Polares

(Estudiar la Sección 10.3 en el Stewart 8ª Edición y hacer la Tarea No. 3)



Ecuaciones de Transformación de Coordenadas Polares a Coordenadas Cartesianas

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = r\cos\theta}$$

$$sen\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = rsen\theta}$$

$$(-r,\theta) = (r,\theta+\pi)$$
$$(r,\theta) = (r,\theta \pm 2n\pi)$$

Ecuaciones de Transformación de Coordenadas Cartesianas a Coordenadas Polares.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Ejemplos resueltos

En los ejercicios 1 y 2 determine la ecuación cartesiana de la curva descrita por la ecuación polar dada.

1

$$r = \frac{1}{1+2sen\theta}$$
$$r(1+2sen\theta) = 1$$
$$r + 2rsen\theta = 1$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 2y$$
$$x^2 + y^2 = 1 - 4y + 4y^2$$
$$\underline{\underline{x^2 - 3y^2 + 4y = 1}}$$

2

$$r^2 = \theta$$
$$x^2 + y^2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\tan(x^2 + y^2) = \frac{y}{x}$$
$$\underline{\underline{y = x\tan(x^2 + y^2)}}$$

En los ejercicios 3 y 4, determine una ecuación polar de la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

3	$y = 2x - 1$ $rsen\theta = 2r\cos\theta - 1$ $2r\cos\theta - rsen\theta = 1$ $r(2\cos\theta - sen\theta) = 1$ $r = \frac{1}{2\cos\theta - sen\theta}$ $r = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{2\cos\theta - sen\theta}{\cos\theta}}$ $r = \frac{\sec\theta}{2 - \tan\theta}$	4	$x^2 = 4y$ $r^2\cos^2\theta = 4rsen\theta$ $r = \frac{4sen\theta}{\cos^2\theta}$ $r = 4\frac{sen\theta}{\cos\theta}\frac{1}{\cos\theta}$ $r = 4\tan\theta\sec\theta$

En los ejercicios 5 y 6 determine la ecuación cartesiana y dibújela

5	$r = 2sen\theta + 2\cos\theta$ $r = 2\left(\frac{y}{r} + \frac{x}{r}\right)$ $r^2 = 2(x + y)$ $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ en un círculo con centro en $C(1,1)$ y radio $r = \sqrt{2}$	6	$r = 4\cos\theta$ $r^2 = 4r\cos\theta$ $x^2 + y^2 = 4x$ $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$ $(x-2)^2 + y^2 = 4$ en un círculo con centro en $C(2,0)$ y radio $r = 2$

Resumen de Ecuaciones de Curvas en Coordenadas Polares

Coordenadas Polares (Stewart 8ª Ed Secciones 10.3 y 10.4)

Ecuaciones de Transformación de Coordenadas	$x = r\cos(\theta)$ $y = rsen(\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
Pendiente en un punto (x_0,y_0)	$\left.\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\|_{(x_0,y_0)} = \frac{\left.\left(\frac{dy}{d\theta}\right)\right\|_{(r_0,\theta_0)}}{\left.\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\right\|_{(r_0,\theta_0)}} = \frac{r\cos(\theta) + sen(\theta)\frac{dr}{d\theta}}{-rsen(\theta) + \cos(\theta)\frac{dr}{d\theta}}$	
Area debajo de un segmento de la curva $r = f(\theta)$	$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$	
Diferencial de Arco $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$	$x = r\cos(\theta) = f(\theta)\cos(\theta); y = rsen(\theta) = f(\theta)sen(\theta)$ $\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - rsen(\theta); \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}sen(\theta) + r\cos(\theta)$ $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 =$ $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2(\theta) - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta)sen(\theta) + r^2 sen^2(\theta) +$ $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2(\theta) + 2r\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta)sen(\theta) + r^2\cos^2(\theta)$ $= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$ $\therefore \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \cdot d\theta$	
Longitud de Arco de un segmento de la curva $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$	$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \cdot d\theta$	

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No. 3 : Coordenadas Polares**			
En los problemas 1 y 2, dibuje la región en el plano formada por los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.			
1	$0 \le r \le 2 \quad ; \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$	2	$2 \le r \le 3 \quad ; \quad \frac{5\pi}{3} \le \theta \le \frac{7\pi}{3}$
En los problemas 3 y 4 determine la ecuación cartesiana de la curva descrita por la ecuación polar dada.			
3	$r = 3sen\theta$	4	$r^2 = sen(2\theta)$
En los problemas 5 y 6, determine una ecuación polar de la curva representada por la ecuación cartesiana dada.			
5	$x^2 + y^2 = 25$	6	$2xy = 1$
En los problemas 7 y 8 determine la ecuación cartesiana y dibújela			
7	$r = -2sen\theta$	8	$r = \csc\theta$

$$R3: \quad x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$R4: \quad \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$$

$$R5: \quad r = 5$$

$$R6: \quad r^2 = \csc(2\theta)$$

$$R7: \quad x^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$R8: \quad y = 1$$