Unidad 2 : VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Tema 2.3 : Producto Punto o Escalar de Vectores

(Estudiar la Sección 12.3 en el Stewart 8ª Edición y hacer la Tarea No. 6)

Definición: Dados los vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$; $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$
entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Definición: Dados los vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ con magnitudes $|\vec{a}|\ y\ |\vec{b}|$ y con un ángulo θ entre ellos, entonces: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

Angulo entre dos vectores: $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Vectores ortogonales: si los vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ son perpendiculares entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Cosenos Directores del vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Reemplazando **b** sucesivamente por los vectores unitarios i,j,k tenemos que:

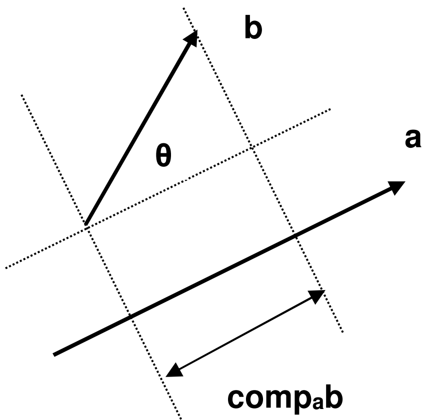
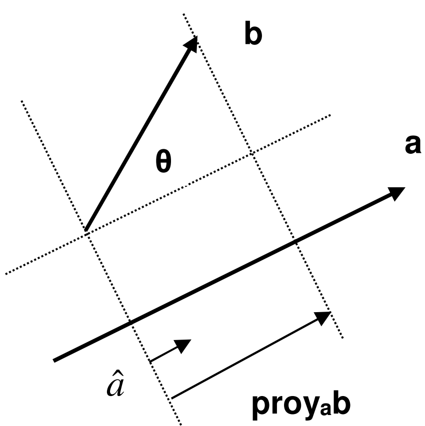
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} ; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} ; \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle}{|\vec{a}|} = \left\langle \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right\rangle = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

y como $|\hat{a}| = 1$ entonces : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
es la generalización a 3D de la identidad en 2D : $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

Proyección escalar de b sobre a = $comp_a b = |\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \hat{a}$

Proyección vectorial de b sobre a = $proy_a b = (comp_a b)\hat{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$

Proyección ó Componente Escalar de b sobre a $comp_{\vec{a}}\vec{b}$	
	$\cos\theta = \frac{comp_a\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ $comp_a\vec{b} = \lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ $comp_a\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $comp_a\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}\cdot\vec{b}$ $comp_a\vec{b} = \hat{a}\cdot\vec{b}$
Proyección Vectorial de b sobre a $proy_{\vec{a}}\vec{b}$	
	$proy_{\vec{a}}\vec{b} = \left(comp_{\vec{a}}\vec{b}\right)\hat{a}$ $proy_{\vec{a}}\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)\hat{a}$ $proy_{\vec{a}}\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $proy_{\vec{a}}\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert^2}\right)\vec{a}$

Ejercicios sobre el Producto Punto
1.- Encuentre el ángulo entre los vectores $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \quad y \quad \vec{b} = 2\hat{j} - 3\hat{k}$ 2.- Encuentre el ángulo entre los vectores $\vec{a} = \langle 2,2,-1 \rangle \quad y \quad \vec{b} = \langle 5,-3,2 \rangle$ 3.- Determine si los vectores $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \quad y \quad \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ son ortogonales, paralelos, o ninguna de las dos. 4.- Encuentre los ángulos directores del vector $\vec{a} = -8\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ 5.- Encuentre los ángulos directores del vector $\vec{a} = \langle 1,2,3 \rangle$ 6.- Encuentre el ángulo entre la diagonal del cubo y la diagonal de una de sus caras 7.- Encuentre las proyecciones escalar y vectorial de, si $\vec{b}$ *sobre* $\vec{a}$, si: $\vec{a} = \langle 4,2,0 \rangle \quad y \quad \vec{b} = \langle 1,1,1 \rangle$ 8.- Encuentre las proyecciones escalar y vectorial de $\vec{a}$ *sobre* $\vec{b}$, si $\vec{a} = \langle 1,1,2 \rangle \quad y \quad \vec{b} = \langle -2,3,1 \rangle$
R1: $\theta \approx 117°$; R2: $\theta \approx 84°$; R3: ortogonales ; R3: $\alpha \approx 156°, \beta \approx 70°, \gamma \approx 77°$ R5: $\alpha \approx 75°, \beta \approx 58°, \gamma \approx 37°$; R6: $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\theta \approx 35°$; R7: $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\left\langle \frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{0}{5} \right\rangle$ R8: $\frac{3}{\sqrt{14}}$; $\left\langle \frac{-3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right\rangle$
Tarea asignada para entregar al inicio de la próxima clase: Tarea No. 6 “Producto Punto” Estudiar en el libro “Calculus, 8th Edition; Early Trascendentals” la sección 12.4 “Producto Cruz”

	Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No 6 : Producto Escalar de Vectores**
1	Encuentre el producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ de los vectores $\vec{a} = <5,0,-2>, \quad \vec{b} = <3,-1,10>$
2	Encuentre el producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ de los vectores $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \vec{b} = 5\hat{i} + 9\hat{k}$
3	Encuentre el ángulo entre los vectores: $\vec{a} = <1,2,3>, \quad \vec{b} = <4,0,-1>$
4	Encuentre el ángulo entre los vectores: $\vec{a} = \hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$
5	Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos: $\vec{a} = <-5,3,7>, \quad \vec{b} = <6,-8,2>$
6	Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector dado: $\vec{a} = -8\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$
7	Encuentre el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.
8	Una molécula de metano, CH_4, está estructurada con los cuatro átomos de hidrógeno en los vértices de un tetraedro regular y el átomo de carbono en el centroide. El *ángulo de enlace* es el ángulo formado por la combinación H-C-H; esto es, el ángulo entre las rectas que unen el átomo de carbono a dos de los átomos de hidrógeno. Demuestre que el ángulo de enlace es de unos 109.5°. [Sugerencia: tome los vértices del tetraedro como los puntos (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); y (1,1,1); y el centroide en (1/2,1/2,1/2).]
	R1: -5 ; R2: 32 ; R3: $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{238}}\right) \approx 86°$, R4: $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\sqrt{7}}\right) \approx 101°$; R5: no son paralelos ni ortogonales, R6: $-8/\sqrt{77}, \quad 3/\sqrt{77}, \quad 2/\sqrt{77} \quad ; \quad 156°, \quad 70°, \quad 77°$; R7: $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 55°$