Unidad 2 : VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Tema 2.4 : Producto Cruz o Vectorial de Vectores

(Estudiar la Sección 12.4 en el Stewart 8ª Edición y hacer la Tarea No. 7)

Definición de determinante de 2 por 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Definición: Dados los vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$; $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$$

Nota 1: El vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano que contiene ambos vectores.
Ejemplos: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

Nota 2: El producto cruz no es conmutativo : $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Definición: Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con magnitudes $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ y con un ángulo θ entre ellos, entonces: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| sen\theta$.

Nota 3: Dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

Area del Paralelogramo definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ = $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Triple Producto Escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Volumen del Paralelepípedo definido por los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y c = $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$

Ejercicios sobre el Producto Cruz

1.- Encuentre el producto cruz de los vectores $\vec{a} = \langle 1,3,4 \rangle \quad y \quad \vec{b} = \langle 2,7,-5 \rangle$

2.- Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1,4,6), Q(-2,5,-1), R(1,-1,1)$

3.- Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} \quad ; \quad \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

4.- Encuentre un vector ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q y R, y encuentre el área del triángulo PQR, si $P(1,0,-1), \quad Q(2,4,5), \quad R(3,1,7)$

5.- Encuentre el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes PQ, PR y PS si: $P(0,1,2), \quad Q(2,4,5), \quad R(-1,0,1), \quad S(6,-1,4)$

6.- Utilice el triple producto escalar para determinar si los siguientes vectores son coplanares: $\vec{a} = \langle 1,4,-7 \rangle \quad ; \quad \vec{b} = \langle 2,-1,4 \rangle \quad ; \quad \vec{c} = \langle 0,-9,18 \rangle$

$R1: \quad \langle -43,13,1 \rangle \quad ; \quad R2: \quad \vec{a} \times \vec{b} = \langle -40,-15,15 \rangle \quad ; \quad área = \dfrac{\sqrt{2050}}{2} = 22.64 \, ;$

$R3: \quad \left\langle \dfrac{\pm 1}{\sqrt{6}}, \dfrac{\mp 1}{\sqrt{6}}, \dfrac{\mp 2}{\sqrt{6}} \right\rangle \quad ; \; R4: \quad \langle 26,4,-7 \rangle \quad ; \quad \dfrac{\sqrt{741}}{2} \quad ; \; R5: \quad 4 \quad ; \; R6: \quad Sí$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No 7 : Producto Vectorial de Vectores**	
1	Determine el producto cruz, o vectorial, $\vec{a}\times\vec{b}$ de los vectores: $\vec{a}=\langle 1,-1,0\rangle$; $\vec{b}=\langle 3,2,1\rangle$
2	Determine el producto cruz, o vectorial, $\vec{a}\times\vec{b}$ de los vectores: $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$; $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$
3	Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\langle 1,-1,1\rangle$ y $\langle 0,4,4\rangle$
4	Encuentre el área del paralelogramo con vértices: $A(0,1)$; $B(3,0)$; $C(5,-2)$; $D(2,-1)$
5	(a) Encuentre un vector ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q, y R, y (b) encuentre el área del triángulo PQR. $P(0,0,0)$; $Q(1,-1,1)$; $R(4,3,7)$
6	Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}=\langle 1,0,6\rangle$, $\vec{b}=\langle 2,3,-8\rangle$, $\vec{c}=\langle 8,-5,6\rangle$
7	Encuentre el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes PQ, PR y PS. $P(1,1,1)$; $Q(2,0,3)$; $R(4,1,7)$; $S(3,-1,-2)$
8	Utilice el triple producto escalar para verificar que los vectores $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}$; y $\vec{c}=7\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$; son coplanares
R1: $-\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$; R2: $2\hat{i}+13\hat{j}-8\hat{k}$; R3: $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle ; \left\langle \frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right\rangle$ R4: 4; R5: $(a)\langle -10,-3,7\rangle ; (b)\frac{\sqrt{158}}{2}$; R6: 226; R7: 21	