

## Unidad 2 : VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO

### Tema 2.5 : Ecuaciones de Rectas y Planos

(Estudiar la Sección 12.5 en el Stewart 8ª Edición y hacer la Tarea No. 8)

Ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  en la dirección del vector  $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ , en donde a, b y c se llaman **números directores** y el vector v se llama el **vector director** de la recta.

<p><i>Ecuación Vectorial</i></p> $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$	<p><i>Ecuaciones Paramétricas</i></p> $x = x_0 + at$ $y = y_0 + bt$ $z = z_0 + ct$	<p><i>Ecuaciones Simétricas</i></p> $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$
---	--	---

Dos rectas  $L_1$  y  $L_2$ , con vectores directores  $v_1$  y  $v_2$ , son paralelas si  $v_2 = k v_1$ . Si no son paralelas puede ser que se intercepten en un punto o que no lo hagan. Si no son paralelas ni se interceptan se dice que son oblicuas o sesgadas.

Ecuaciones del plano que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , y es perpendicular al vector normal  $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$

<p><i>Ecuación Vectorial</i></p> $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$	<p><i>Ecuación Escalar</i></p> $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
<p><i>Ecuación Lineal</i></p> $ax + by + cz = d$	

### Ejercicios de práctica

E1.- (a) Encuentre la ecuación vectorial y (b) las ecuaciones paramétricas y (c) simétricas de la recta que pasa por el punto  $(5, 1, 3)$  y es paralela al vector  $\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ , y (d) encuentre otros dos puntos sobre la recta.

E2.- (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas y (b) simétricas de la recta de la recta que pasa por los puntos  $(2, 4, -3)$  y  $(3, -1, 1)$ . (c) ¿En que punto intercepta la recta al plano xy?

E3.- Muestre que las rectas  $L_1$  y  $L_2$  se interceptan en un punto y determine el punto de intersección

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4} = t \quad ; \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3} = s$$

E4.- (a) Determine la ecuación lineal del plano que pasa por el punto  $P_0(2,4,-1)$  y es perpendicular al vector  $\vec{n} = \langle 2,3,4 \rangle$ , (b) Determine las intersecciones con los ejes, (c) determine las trazas con los planos de coordenadas, y (d) dibuje el plano.

E5.- Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos:  $P(1,3,2), Q(3,-1,6), R(5,2,0)$

E6.- Encuentre el punto en donde la recta  $x = 2 + 3t, y = -4t, z = 5 + t$  intercepta al plano  $4x + 5y - 2z = 18$

E7.- Determine las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los dos planos:  $x + y + z = 1 \quad ; \quad x - 2y + 3z = 1$

#### Respuestas a los ejercicios:

$$R1: \vec{r} = \langle 5,1,3 \rangle + t \langle 1,4,-2 \rangle = \langle 5+t, 1+4t, 3-2t \rangle = (5+t)\hat{i} + (1+4t)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

$$(b): x = 5+t \quad ; \quad y = 1+4t \quad ; \quad z = 3-2t$$

$$(c): x-5 = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-2} = t$$

$$(d): t=1 \rightarrow (6,5,1) \quad ; \quad t=2 \rightarrow (7,9,-1)$$

$$R2: (a) \quad x = 2+t \quad ; \quad y = 4-5t \quad ; \quad z = -3+4t$$

$$(b) \quad x-2 = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

$$(c) \quad \left( \frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right)$$

$$R3: \text{ se interceptan en } (1,0,1)$$

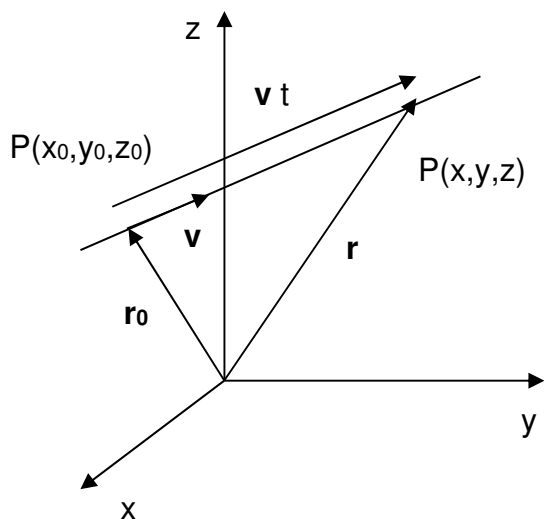
$$R5: 6x + 10y + 7z = 50$$

$$R4: 2x + 3y + 4z = 12 \quad ; \\ 2x + 3y = 12, 3y + 4z = 12, 2x + 4z = 12 \\ (0,0,3), (0,4,0), (6,0,0)$$

$$R6: P(-4,8,3)$$

$$R7: x = 1 + 5t, \quad y = -2t, \quad z = -3t$$

## Ecuaciones de Rectas



$\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$  *vector director*

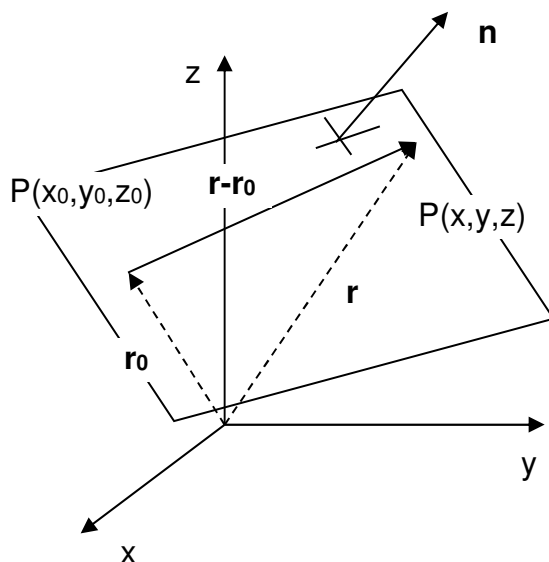
$\vec{r}(t) = r_0 + \vec{v}t$  *Ecuación Vectorial*

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{Paramétricas} \end{array}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

*Ecuaciones Simétricas*

## Ecuaciones de Planos



$\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$  *vector normal*

$(\vec{r} - r_0) \cdot \vec{n} = 0$  *Ecuación Vectorial*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

*Ecuación Escalar del Plano*

$$ax + by + cz = d$$

*Ecuación Lineal del Plano*

**Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III**

**Tarea No 8 : Ecuaciones de Rectas y de Planos**

1	Encuentre una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(-2, 4, 10)$ y es paralela al vector $\langle 3, 1, -8 \rangle$
2	Encuentre una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(1, 0, 6)$ y es perpendicular al plano $x + 3y + z = 5$
3	Encuentre ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos $(3, 1, -1)$ y $(3, 2, -6)$
4	Determine si las rectas $L_1$ y $L_2$ son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se cortan, encuentre el punto de intersección. $L_1 : x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$ ; $L_2 : x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$
5	Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y tiene un vector normal $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
6	Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos: $(0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad y \quad (1, 1, 0)$
7	Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(6, 0, -2)$ y contiene a la recta $x = 4 - 2t, \quad y = 3 + 5t, \quad z = 7 + 4t$
8	Encuentre el punto en el que la recta dada corta al plano especificado: $x = 1 + 2t, \quad y = -1, \quad z = t$ ; $2x + y - z + 5 = 0$
9	(a) Encuentre ecuaciones simétricas para la recta de intersección de los planos, y (b) encuentre el ángulo entre los planos. $x + y - z = 2$ ; $3x - 4y + 5z = 6$
10	Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ , es paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2t$
<p>R1: <math>\vec{r} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}) + t(3\hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}); x = -2 + 3t, y = 4 + t, z = 10 - 8t</math></p> <p>R2: <math>\vec{r} = (\hat{i} + 6\hat{k}) + t(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}); x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t</math>; R3: <math>x = 3, y = 1 + t, z = -1 - 5t; x = 3, y - 1 = \frac{z + 1}{-5}</math></p> <p>R4: Paralelas; R5: <math>x + y - z = -1</math>; R6: <math>x + y + z = 2</math>; R7: <math>33x + 10y + 4z = 190</math>; R8: <math>(-3, -1, -2)</math>;</p> <p>R9: (a) <math>x - 2 = \frac{y}{-8} = \frac{z}{-7}</math> ; (b) <math>\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{6}}{5}\right) \approx 119^\circ</math> (o <math>61^\circ</math>); R10: <math>x = 3t, y = 1 - t, z = 2 - 2t</math></p>	