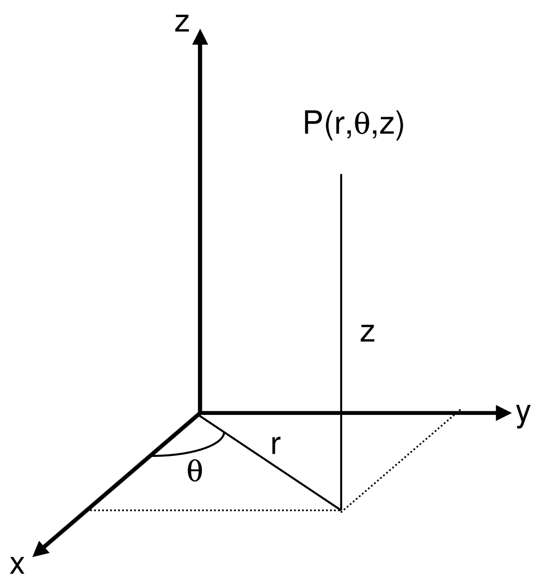
Unidad 2 : VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Tema 2.7 : Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

(Estudiar la Sección 12.7 en el Stewart 5ª Edición y hacer la Tarea No. 10)

Coordenadas Cilíndricas : (r,θ,z)



Ecuaciones de Transformación de Coordenadas Cartesianas a Coordenadas Cilíndricas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

Ecuaciones de Transformación de Coordenadas Cilíndricas a Coordenadas Cartesianas

$$x = r\cos\theta$$
$$y = rsen\theta$$
$$z = z$$

Ejemplo 1:

(a) Graficar el punto $\left(2, \frac{\pi}{3}, 1\right)$ en coordenadas cilíndricas y expresarlo en coordenadas cartesianas

(b) Expresar en coordenadas cilíndricas el punto con coordenadas cartesianas $(3,-3,-7)$

Ejemplo 2: Determine la ecuación de un cilindro en coordenadas cilíndricas

$$x^2 + y^2 = c^2$$
$$r^2 = c^2$$
$$\underline{\underline{r = c}}$$

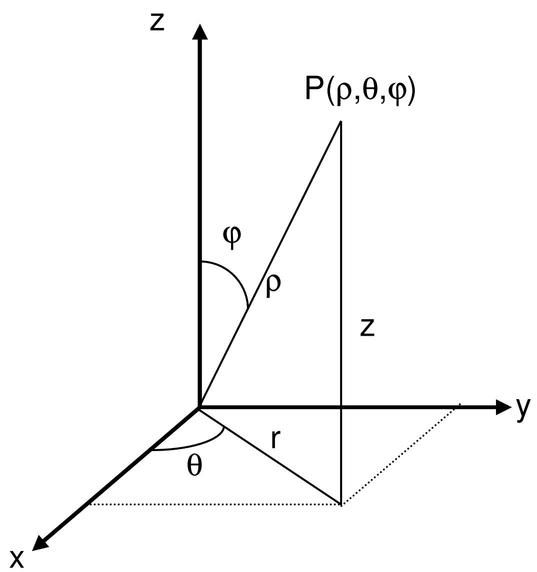
Ejemplo 3: Determine la ecuación de un cono en coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$
$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$z^2 = r^2$$
$$\underline{\underline{z = r}}$$

Ejemplo 4: Determine la ecuación de un elipsoide en coordenadas cilíndricas**:**

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$
$$1 - z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$$
$$1 - z^2 = 4r^2$$
$$\underline{\underline{z^2 = 1 - 4r^2}}$$

Coordenadas Esféricas : (ρ,θ,φ)



Ecuaciones de Transformación de Coordenadas Esféricas a Coordenadas Cartesianas

$$x = \rho \ sen\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \ sen\varphi \, sen\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

Ecuaciones de Transformación de Coordenadas Cartesianas a Coordenadas Esféricas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

Ejemplo 5: Determine las coordenadas cartesianas del punto con coordenadas esféricas $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

Ejemplo 6: Determine las coordenadas esféricas del punto con coordenadas cartesianas $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$

Ejemplo 7: Determine la ecuación de un hiperboloide de dos hojas en coordenadas esféricas

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$
$$(\rho sen\varphi\cos\theta)^2 - (\rho sen\varphi sen\theta)^2$$
$$-(\rho\cos\varphi)^2 = 1$$
$$\rho^2\left[sen^2\varphi\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) - \cos^2\varphi\right] = 1$$

Ejemplo 8: Determine la ecuación en coordenadas cartesianas de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es:

$$\rho = sen\theta \, sen\varphi$$
$$\rho^2 = \rho sen\theta \, sen\varphi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Tarea asignada para entregar al inicio de la próxima clase:
Tarea No. 10 "Coordenadas Cilíndricas y Esféricas"

Estudiar en el libro "Calculus 5th Edition Early Trascendentals" la sección 13.1 "Vector Functions and Space Curves"

$$R5: \ \left(\sqrt{3}/2\,,\ \sqrt{3}/2, 1\right) \quad ; \quad R6: \ \left(4, \pi/2, 2\pi/3\right)$$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 10 : Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

1	Cambie de coordenadas cilíndricas a esféricas las coordenadas del punto: $P(4,\pi/3,4)$
2	Cambie de coordenadas esféricas a cilíndricas las coordenadas del punto: $P(8,\pi/6,\pi/2)$

En los siguientes problemas identifique la superficie dada por la ecuación, pasándola a coordenadas cartesianas:

3	$z = r^2$	5	$r = 2\cos\theta$
4	$\rho\cos\varphi = 2$	6	$r^2 + z^2 = 25$

Escriba la ecuación (a) en coordenadas cilíndricas y (b) en coordenadas esféricas.

7	$x^2 + y^2 + z^2 = 16$	8	$x + 2y + 3z = 6$

Respuestas:

$R1: \left(4\sqrt{2},\pi/3,\pi/4\right)$	R5: Cilindro circular, radio 1, con su eje paralelo el eje z, pasando por el punto (1,0,0)
$R2: (8,\pi/6,0)$	R6: Esfera, radio 5, centro en le origen
R3: Paraboloide circular con ecuación: $z = x^2 + y^2$	R7: $(a) \quad r^2 + z^2 = 16 \quad ; \quad (b) \quad \rho = 4$
R4: Plano horizontal con la ecuación $z = 2$	R8: $(a)\ r\cos\theta + 2rsen\theta + 3z = 6$ $(b)\ \rho(sen\varphi\cos\theta + 2sen\varphi\, sen\theta + 3\cos\varphi) = 6$