Unidad 3 : FUNCIONES VECTORIALES

Tema 3.2 : Derivadas e Integrales de Funciones Vectoriales

(Estudiar la Sección 13.2 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 11)

Definición de derivada de una función vectorial: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \underbrace{\lim}_{h\to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$

Representación geométrica de $\vec{r}\,'(t)$: gráficamente el vector $\vec{r}\,'(t)$ representa un vector tangente a la curva con ecuación vectorial: $\vec{r}(t) = \langle f(t)\,,\, g(t)\,,\, h(t)\rangle$

Vector tangente unitario: $\hat{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$

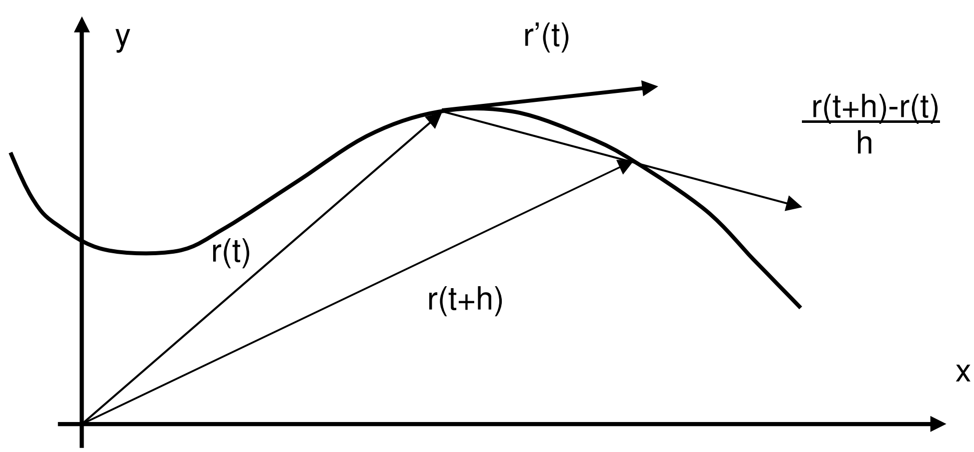
Cálculo de la derivada de una función vectorial:

$$\vec{r}\,'(t) = \langle f'(t)\,,\, g'(t)\,,\, h'(t)\rangle = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} + h'(t)\hat{k}$$

Cálculo de la integral de una función vectorial:

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\hat{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\hat{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\hat{k}$$

La derivada del vector de posición r(t) siempre es un vector tangente a la curva



Ejercicios de práctica
E1.- (a) Encuentre la derivada de la función vectorial: $\vec{r}(t)=(1+t^2)\hat{i}+(te^{-t})\hat{j}+(sen2t)\hat{k}$, y (b) calcule el vector tangente unitario $\hat{T}(0)$
E2.- Para la función vectorial $\vec{r}(t)=\sqrt{t}\hat{i}+(2-t)\hat{j}$: (a) determine las ecuaciones paramétricas de la curva, (b) la ecuación cartesiana de la curva, (c) dibuje la curva, (d) calcule los vectores $\vec{r}(1) \quad y \quad \vec{r}'(1)$; y (e) dibújelos sobre la curva
E3.- Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado. $\vec{r}(t)=\langle t^2-1\,,t^2+1\,,t+1\rangle \quad ; \quad P(-1,1,1)$
E4.- Evalúe la integral: $\int_1^2\left[(1+t^2)\hat{i}-4t^3\hat{j}-(t^2-1)\hat{k}\right]dt$
E5.- La función vectorial $\vec{r}(t)$ representa un vector de dirección variable, pero de magnitud constante, esto es, $\lvert\vec{r}(t)\rvert=k$. Demuestre que el vector derivada $\vec{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\vec{r}(t)$. ($\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$)
E4.- Definir los vectores Normal y Binormal Unitarios: $$\hat{N}(t)=\frac{\hat{T}'}{\lvert\hat{T}'\rvert} \quad ; \quad \hat{B}(t)=\hat{T}(t)\times\hat{N}(t)$$ $$plano \quad \hat{N},\hat{B} \quad plano\ normal$$ $$plano \quad \hat{T},\hat{N} \quad plano\ osculador$$ $$plano \quad \hat{T},\hat{B} \quad plano\ rectificador$$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 11 : Derivadas e Integrales de Funciones Vectoriales

(Secciones 13.1 y 13.2 del Stewart 8ª Edición)

Para las funciones vectoriales dadas: (a) determine las ecuaciones paramétricas, (b) la ecuación cartesiana, (c) dibuje la curva, (d) determine el vector $\vec{r}\,'(t)$; y (e) trace sobre la curva el vector de posición $\vec{r}(t)$ y el vector tangente $\vec{r}\,'(t)$ para el valor dado de t.

1	$\vec{r}(t)=(1+t)\hat{i}+t^2\hat{j} \quad ; \quad t=1$	2	$\vec{r}(t)=e^t\hat{i}+e^{-2t}\hat{j} \quad ; \quad t=0$

Encuentre la derivada de la función vectorial dada:

3	$\vec{r}(t)=\left\langle t^2 \,, 1-t \,, \sqrt{t}\right\rangle$	4	$\vec{r}(t)=\ln\left(4-t^2\right)\hat{i}+\sqrt{1+t}\,\hat{j}-4e^{3t}\hat{k}$

Halle el vector tangente unitario $\hat{T}(t)$ en el punto correspondiente al valor dado del parámetro t.

5	$\vec{r}(t)=\left\langle 6t^5 \,, 4t^3 \,, 2t\right\rangle \quad ; \quad t=1$	6	$\vec{r}(t)=t\hat{i}+2sent\hat{j}+3\cos t\hat{k} \quad ; \quad t=\dfrac{\pi}{6}$

Halle las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva con ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado.

7	$x=t^5 \,, y=t^4 \,, z=t^3 \quad ; (1,1,1)$	8	$x=t\cos 2\pi t \,, y=tsen2\pi t \,, z=4t \,; \left(0,\dfrac{1}{4},1\right)$

Evalúe la integral

9	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2t\hat{i}+sen2t\hat{j}+tsent\hat{k}\right)dt$	10	$\int\left(e^t\hat{i}+2t\hat{j}+\ln t\hat{k}\right)dt$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 11 : Funciones Vectoriales

(Secciones 13.1 y 13.2 del Stewart 8ª Edición)

Respuestas a los problemas

$R1: x = 1 + t \ , \ y = t^2 \ , \ y = (x-1)^2 \ , \ \vec{r}'(t) = \hat{i} + 2t\hat{j} \quad , \vec{r}(1) = \langle 2,1 \rangle \quad , \vec{r}'(1) = \langle 1,2 \rangle$

$R2: x = e^t \ , \ y = e^{-2t} \ , \ y = \dfrac{1}{x^2} \ , \ \vec{r}'(t) = e^t\hat{i} - 2e^{-2t}\hat{j} \quad , \vec{r}(0) = \langle 1,1 \rangle \quad , \vec{r}'(0) = \langle 1,-2 \rangle$

$R3: \vec{r}'(t) = \left\langle 2t \ , -1 \ , \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle$

$R4: \vec{r}'(t) = \dfrac{-2t}{(4-t^2)}\hat{i} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}\hat{j} - 12e^{3t}\hat{k}$

$R5: \left\langle \dfrac{15}{\sqrt{262}}, \dfrac{6}{\sqrt{262}}, \dfrac{1}{\sqrt{262}} \right\rangle$

$R6: \dfrac{2}{5}\hat{i} + \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\hat{j} - \dfrac{3}{5}\hat{k}$

$R7: x = 1 + 5t \quad , \quad y = 1 + 4t \quad , \quad z = 1 + 3t$

$R8: x = -\dfrac{\pi}{2}t \quad , \quad y = \dfrac{1}{4} + t \quad , \quad z = 1 + 4t$

$R9: \dfrac{1}{2}\hat{i} + \dfrac{1}{2}\hat{j} + \left(\dfrac{4-\pi}{4\sqrt{2}} \right)\hat{k}$

$R10: e^t\hat{i} + t^2\hat{j} + (t\ln t - t)\hat{k} + C$