

Unidad 3 : FUNCIONES VECTORIALES Tema 3.3 : Longitud de Arco y Curvatura (Estudiar la Sección 13.3 en el Stewart 8ª Edición; No hay tarea)	
<p>Primero veamos que un vector de magnitud constante y su vector derivada siempre son vectores ortogonales</p>	$ \vec{A}(t) = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = c; \quad \vec{A}(t) \circ \vec{A}(t) = \vec{A}(t) ^2 = c^2$ $\frac{d}{dt} [\vec{A}(t) \circ \vec{A}(t) = c^2] = \vec{A}(t) \circ \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \circ \vec{A}(t) =$ $2\vec{A}(t) \circ \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{A}(t) \circ \vec{A}'(t) = 0$ <p>$\therefore \vec{A}(t)$ y $\vec{A}'(t)$ son ortogonales</p>
<p>Recordemos ahora la definición de longitud de arco de una curva con ecuaciones paramétricas</p> $x = f(t)$ $y = g(t)$ $z = h(t)$ $a \leq t \leq b$	$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$ $\left \frac{d\vec{r}}{dt}\right = \vec{r}'(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ $\therefore s = \int_a^b \vec{r}'(t) \cdot dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$
<p>Definimos ahora la curvatura de una curva como la magnitud de la razón de cambio de su vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco</p>	$k \equiv \left \frac{d\hat{T}}{ds} \right \quad \therefore k = \left \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right = \left \frac{\hat{T}'(t)}{ \vec{r}'(t) } \right $ <p style="text-align: center;"><i>Teorema :</i></p> $k = \frac{ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) }{ \vec{r}'(t) ^3} = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{ \vec{r}' ^3}$

Unidad 3 : FUNCIONES VECTORIALES

Tema 3.3 : Longitud de Arco y Curvatura

(Estudiar la Sección 13.3 en el Stewart 8ª Edición)

<p>Demostración del Teorema anterior</p>	<p>Como $\hat{T} = \frac{\vec{r}'}{ \vec{r}' }$ y además $\vec{r}' = \frac{ds}{dt}$ entonces.</p> $\vec{r}' = \vec{r}' \hat{T} = \frac{ds}{dt} \hat{T} \Rightarrow \vec{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{T} + \frac{ds}{dt} \hat{T}'$ <p>y calculando ahora</p> $\vec{r}' \times \vec{r}'' = \left[\frac{ds}{dt} \hat{T} \right] \times \left[\frac{d^2s}{dt^2} \hat{T} + \frac{ds}{dt} \hat{T}' \right]$ <p>y recordando que: $\hat{T} \times \hat{T} = 0$ porque $\text{sen}(0) = 0$</p> $\vec{r}' \times \vec{r}'' = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\hat{T} \times \hat{T}')$ $ \vec{r}' \times \vec{r}'' = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \hat{T} \times \hat{T}' = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \hat{T}' \quad \therefore$ $ \hat{T}' = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{(ds/dt)^2} = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{ \vec{r}' ^2} \quad ; \quad \hat{T}' = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{ \vec{r}' ^2}$ <p>y como $k = \frac{ \hat{T}' }{ \vec{r}' } \Rightarrow k = \frac{ \vec{r}' \times \vec{r}'' }{ \vec{r}' ^3}$</p>
<p>Definimos el Vector Normal Unitario, N, como un vector unitario en la dirección del cambio del vector unitario T</p>	$\hat{N}(t) \equiv \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left \frac{d\hat{T}}{dt} \right } \Rightarrow \hat{N}(t) = \frac{\hat{T}'(t)}{ \hat{T}'(t) }$