Unidad 3 : FUNCIONES VECTORIALES **Tema 3.4 : Movimiento en el Espacio** (Estudiar la Sección 13.4 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 12)	
Recordando que:	$$\hat{T}=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\lvert\vec{r}\,'(t)\rvert}=\frac{\vec{v}(t)}{\lvert\vec{v}(t)\rvert}\quad\therefore\quad \vec{v}(t)=\lvert\vec{v}(t)\rvert\cdot\hat{T}\quad\Rightarrow\quad\vec{v}(t)=v(t)\cdot\hat{T}$$ $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[v(t)\cdot\hat{T}\right]\quad\Rightarrow\quad\vec{a}=v'\hat{T}+v\hat{T}'$$
Y recordando que:	$$\left.\begin{matrix}\hat{N}=\dfrac{\hat{T}'}{\lvert\hat{T}'\rvert}\quad\Rightarrow\quad\hat{T}'=\lvert\hat{T}'\rvert\hat{N}\\ k=\dfrac{\lvert\hat{T}'\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert}\quad\Rightarrow\quad\lvert\hat{T}'\rvert=k\lvert\vec{r}\,'\rvert=kv\end{matrix}\right\}\ \vec{T}'=\lvert\hat{T}'\rvert\hat{N}=kv\hat{N}$$
Entonces tenemos que:	$$\left.\begin{matrix}\vec{a}=v'\hat{T}+kv^2\hat{N}\\ \vec{a}=a_T\hat{T}+a_N\hat{N}\end{matrix}\right\}\ \left\{\begin{matrix}a_T=v'\\ a_N=kv^2\end{matrix}\right.$$
Y además:	$$\vec{v}\circ\vec{a}=\left[v\hat{T}\right]\circ\left[v'\hat{T}+kv^2\hat{N}\right]$$ $$\vec{v}\circ\vec{a}=vv'\hat{T}\circ\hat{T}+kv^3\hat{T}\circ\hat{N}\quad\Rightarrow\quad\vec{v}\circ\vec{a}=vv'$$ $$\therefore\quad v'=\frac{\vec{v}\circ\vec{a}}{v}=\frac{\vec{v}\circ\vec{a}}{\lvert\vec{v}\rvert}\quad\Rightarrow\quad a_T=\frac{\vec{r}\,'\circ\vec{r}\,''}{\lvert\vec{r}\,'\rvert}=\frac{\vec{v}\circ\vec{a}}{\lvert\vec{v}\rvert}$$
Y además:	$$a_N=kv^2=\frac{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert^3}\cdot v^2=\frac{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert^3}\cdot\lvert\vec{r}\,'\rvert^2$$ $$\Rightarrow\quad a_N=\frac{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert}=\frac{\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$$

Ejercicios de práctica	
Encuentre la velocidad, la aceleración y rapidez de una partícula con función de posición dada. Trace la trayectoria de la partícula y trace los vectores de velocidad y aceleración para el valor dado de t	
E1.- $\vec{r}(t)=\left\langle \sqrt{t}\ ,(1-t)\right\rangle \quad ; \quad t=1$	E2.- $\vec{r}(t)=\langle sent,\cos t\rangle \quad ; \quad t=\dfrac{\pi}{6}$
Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función de posición dada:	
E3.- $\vec{r}(t)=\langle 2\cos t\ ,3t\ ,2sent\rangle$	E4.- $\vec{r}(t)=\left\langle t^2\ ,\ln t\ ,t\right\rangle$
Hallar las componentes tangencial y normal del vector de aceleración:	
E5.- $\vec{r}(t)=(1+t)\hat{i}+\left(t^2-2t\right)\hat{j}$ $\vec{v}(t)=\hat{i}+(2t-2)\hat{j}$ $\lvert\vec{v}(t)\rvert=\sqrt{1+4(t-1)^2}$ $\vec{a}(t)=2\hat{j}$ $\vec{v}\cdot\vec{a}=4t-4=4(t-1)$ $\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2t-2 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\hat{k}$ $\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert=\lvert 2\hat{k}\rvert=2$ $a_T=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{v}(t)\rvert}=\dfrac{4(t-1)}{\sqrt{1+4(t-1)^2}}$ $a_N=\dfrac{\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{v}(t)\rvert}=\dfrac{2}{\sqrt{1+4(t-1)^2}}$	E6.- $\vec{r}(t)=t\hat{i}+t^2\hat{j}+3t\hat{k}$ $\vec{v}(t)=\hat{i}+2t\hat{j}+3\hat{k}$ $\lvert\vec{v}(t)\rvert=\sqrt{1+4t^2+9}=\sqrt{4t^2+10}$ $\vec{a}(t)=2\hat{j}$ $\vec{v}\cdot\vec{a}=4t$ $\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2t & 3\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-6\hat{i}+2\hat{k}$ $\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$ $a_T=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{v}(t)\rvert}=\dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+10}}$ $a_N=\dfrac{\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{v}(t)\rvert}=\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{4t^2+10}}$

Halle los vectores $\hat{T},\hat{N}$ y $\hat{B}$ para la curva dada en el punto indicado

$$\vec{r}(t)=\left\langle t^2\ ,\ \frac{2}{3}t^3\ ,\ t\right\rangle \quad ; \quad \left(1\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1\right)$$

$$\vec{r}\,'(t)=\left\langle 2t\ ,\ 2t^2\ ,\ 1\right\rangle$$

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\sqrt{4t^2+4t^4+1}=\sqrt{\left(2t^2+1\right)^2}=2t^2+1$$

$$\vec{r}\,'(1)=\left\langle 2\ ,\ 2\ ,\ 1\right\rangle \quad ; \quad \left|\vec{r}\,'(1)\right|=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$\hat{T}(1)=\frac{\vec{r}\,'(1)}{\left|\vec{r}\,'(1)\right|}=\frac{\left\langle 2\ ,\ 2\ ,\ 1\right\rangle}{3}=\underline{\underline{\left\langle\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\rangle=\hat{T}(1)}}$$

$$\hat{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}=\frac{\left\langle 2t\ ,\ 2t^2\ ,\ 1\right\rangle}{2t^2+1}=$$

$$\hat{T}(t)=\left\langle\frac{2t}{2t^2+1},\frac{2t^2}{2t^2+1},\frac{1}{2t^2+1}\right\rangle=\frac{\left\langle 2t\ ,\ 2t^2\ ,\ 1\right\rangle}{2t^2+1}$$

$$\hat{T}'(t)=\left\langle\frac{\left(2t^2+1\right)2-2t(4t)}{\left(2t^2+1\right)^2},\frac{\left(2t^2+1\right)4t-2t^2(4t)}{\left(2t^2+1\right)^2},\frac{0-4t}{\left(2t^2+1\right)^2}\right\rangle$$

$$\hat{T}'(t)=\left\langle\frac{2-4t^2}{\left(2t^2+1\right)^2},\frac{4t}{\left(2t^2+1\right)^2},\frac{-4t}{\left(2t^2+1\right)^2}\right\rangle$$

$$\hat{T}'(1)=\left\langle\frac{-2}{9},\frac{4}{9},\frac{-4}{9}\right\rangle \quad ; \quad \left|\hat{T}'(1)\right|=\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\hat{N}(1)=\frac{\hat{T}'(1)}{\left|\hat{T}'(1)\right|}=\frac{3}{2}\left\langle\frac{-2}{9},\frac{4}{9},\frac{-4}{9}\right\rangle=\underline{\underline{\left\langle\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right\rangle=\hat{N}(1)}}$$

$$\hat{B}(1)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\end{vmatrix}=\hat{i}\left(\frac{-4}{9}-\frac{2}{9}\right)-\hat{j}\left(\frac{-4}{9}+\frac{1}{9}\right)+\hat{k}\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)$$

$$\hat{B}(1)=\left\langle\frac{-6}{9},\frac{3}{9},\frac{6}{9}\right\rangle=\underline{\underline{\left\langle\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\rangle=\hat{B}(1)}}$$

Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración de una partícula que se mueve por la curva dada en el punto indicado

$$\vec{r}(t)=\left\langle t^2\ ,\frac{2}{3}t^3\ ,t\right\rangle \quad ; \quad \left(1\ ,\frac{2}{3}\ ,1\right)$$

$$\vec{v}(t)=\left\langle 2t\ ,2t^2\ ,1\right\rangle$$

$$|\vec{v}(t)|=\sqrt{4t^2+4t^4+1}=\sqrt{\left(2t^2+1\right)^2}=2t^2+1$$

$$\vec{v}(1)=\langle 2\ ,2\ ,1\rangle \quad ; \quad |\vec{v}(1)|=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$\vec{a}(t)=\langle 2\ ,4t\ ,0\rangle \quad ; \quad \vec{a}(1)=\langle 2\ ,4\ ,0\rangle$$

$$\vec{v}(1)\cdot\vec{a}(1)=4+8+0=12$$

$$a_T(1)=\frac{\vec{v}(1)\cdot\vec{a}(1)}{|\vec{v}(1)|}=\frac{12}{3}=4$$

$$\vec{v}(1)\times\vec{a}(1)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}=-4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$$

$$|\vec{v}(1)\times\vec{a}(1)|=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$$

$$a_N(1)=\frac{|\vec{v}(1)\times\vec{a}(1)|}{|\vec{v}(1)|}=\frac{6}{3}=2$$

hagámoslo ahora para cualquier valor de t

$$\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)=4t+8t^3=4t\left(1+2t^2\right)$$

$$a_T(t)=\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}=\frac{4t\left(1+2t^2\right)}{2t^2+1}=4t$$

$$\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2t & 2t^2 & 1\\ 2 & 4t & 0\end{vmatrix}=\left\langle -4t\ ,2\ ,4t^2\right\rangle$$

$$|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|=\sqrt{16t^2+4+16t^4}=\sqrt{4\left(4t^4+4t^2+1\right)}$$

$$|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|=2\sqrt{\left(2t^2+1\right)^2}=2\left(2t^2+1\right)$$

$$a_N(t)=\frac{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|}{|\vec{v}(t)|}=\frac{2\left(2t^2+1\right)}{2t^2+1}=2$$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 12 : Movimiento en el Espacio

(Secciones 13.3 y 13.4 del Stewart 8ª Edición)

Encuentre la velocidad, la aceleración y rapidez de una partícula con función de posición dada. Trace la trayectoria de la partícula y trace los vectores de velocidad y aceleración para el valor dado de t

1	$\vec{r}(t)=\langle t^2-1\,,t\rangle \quad ; \quad t=1$	2	$\vec{r}(t)=e^t\hat{i}+e^{-t}\hat{j} \quad ; \quad t=0$

Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función de posición dada:

3	$\vec{r}(t)=\langle t\,,t^2\,,t^3\rangle$	4	$\vec{r}(t)=\sqrt{2}\,t\,\hat{i}+e^t\hat{j}+e^{-t}\hat{k}$

Hallar las componentes tangencial y normal del vector de aceleración:

5	$\vec{r}(t)=(3t-t^3)\hat{i}+3t^2\hat{j}$	6	$\vec{r}(t)=\cos t\hat{i}+sent\hat{j}+t\hat{k}$

Respuestas

1	$\vec{v}(t)=\langle 2t\,,1\rangle \quad ; \quad \vec{a}(t)=\langle 2\,,0\rangle$ $\vec{v}(1)=\langle 2{,}1\rangle \quad ; \quad \vec{a}(1)=\langle 2\,,0\rangle$ $\lvert\vec{v}(t)\rvert=\sqrt{4t^2+1}$	2	$\vec{v}(t)=e^t\hat{i}-e^{-t}\hat{j} \quad ; \quad \vec{a}(t)=e^t\hat{i}+e^{-t}\hat{j}$ $\vec{v}(0)=\langle 1,-1\rangle \quad ; \quad \vec{a}(0)=\langle 1{,}1\rangle$ $\lvert\vec{v}(t)\rvert=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}$
3	$\langle 1\,,2t\,,3t^2\rangle \quad , \quad \langle 0\,,2\,,6t\rangle$ $\sqrt{1+4t^2+9t^4}$	4	$\langle\sqrt{2}\,,e^t\,,-e^{-t}\rangle \quad , \quad \langle 0\,,e^t\,,e^{-t}\rangle$ e^t+e^{-t}
5	$6t \quad , \quad 6$	6	$0 \quad , \quad 1$