

## Unidad 4 : DERIVADAS PARCIALES

### Tema 4.2 : Derivadas Parciales

(Estudiar la Sección 14.3 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 13)

#### Definición de Derivadas Parciales

Si  $z = f(x, y)$  entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

#### Notación para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \quad ; \quad \text{etc.}$$

**Interpretación Geométrica.** Ilustrar la interpretación geométrica con el dibujo de la superficie  $4z + 4x^2 + y^2 = 36$ , mostrando las dos rectas tangentes de las trazas de los planos  $x=x_0$ ,  $y=y_0$ , con la superficie, en cualquiera de los puntos  $P(1,2,7)$  ;  $Q(2,4,1)$  , y con los acetatos a colores del Stewart.

$$z = f(x, y) = 9 - x^2 - \frac{y^2}{4} \quad ;$$

$$f_x(x, y) = -2x \quad ; \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{2}$$

$$f_x(1,2) = -2 \quad ; \quad f_y(1,2) = -1 \quad ;$$

$$f_x(2,4) = -4 \quad ; \quad f_y(2,4) = -2$$

### Ejemplos de Derivadas Parciales

Ejemplo sencillo ilustrativo:

Calcular  $f_x(2,1), f_y(2,1)$  para  $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2x^5y^2 + 4y^3$

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 - 10x^4y^2 \quad ; \quad f_x(2,1) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 16 = -144$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4x^5y + 12y^2 \quad ; \quad f_y(2,1) = 3 \cdot 4 \cdot 1 - 4 \cdot 32 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = -104$$

Ejemplo usando la regla de la cadena

Calcular  $f_x, f_y$  para  $f(x, y) = \text{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$

$$f_x = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \left( \frac{(1+y) \cdot 1 - x \cdot 0}{(1+y)^2} \right) = \frac{1}{1+y} \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$f_y = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \left( \frac{(1+y) \cdot 0 - x \cdot 1}{(1+y)^2} \right) = \frac{-x}{(1+y)^2} \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

Ejemplo con una función de mas de dos variables

Calcular  $f_x, f_y, f_z$  para  $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$

$$f_x = ye^{xy} \ln z \quad ; \quad f_y = xe^{xy} \ln z \quad ; \quad f_z = e^{xy} \frac{1}{z}$$

Ejemplos de derivadas de mayor orden

Calcular  $f_x, f_y, f_{xy}, f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}$  para  $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3, \quad f_y = 3x^2y^2 - 4y, \quad f_{xy} = 6xy^2 = f_{yx},$$

$$f_{xx} = 6x + 2y^3, \quad f_{yy} = 6x^2y - 4$$

Calcular  $f_{xyz}$  para  $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$

$$f_x = 3\cos(3x + yz), \quad f_{xx} = -9\text{sen}(3x + yz), \quad f_{xy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xyz} = 9yz\text{sen}(3x + yz) - 9\cos(3x + yz)$$

Ejemplo usando diferenciación implícita:

$$\text{Calcular } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ para } x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

al derivar con respecto a  $x$  mantenemos  $y$  constante:

$$3x^2 + 0 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6y \left( x \frac{\partial z}{\partial x} + z \right) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 + 6xy) = -3x^2 - 6yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{3z^2 + 6xy}$$

al derivar con respecto a  $y$  mantenemos  $x$  constante:

$$0 + 3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6x \left( y \frac{\partial z}{\partial y} + z \right) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} (3z^2 + 6xy) = -3y^2 - 6xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2 - 6xz}{3z^2 + 6xy}$$

$\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$ ; $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$	$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$ ; $\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$
$\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{\partial}{\partial y}(y^n) = ny^{n-1}$
$\frac{\partial}{\partial x}(z^n) = nz^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}(z^n) = nz^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial x}(3x) = 3$ ; $\frac{\partial}{\partial x}(yx) = y$	$\frac{\partial}{\partial y}(3y) = 3$ ; $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$

## Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

### Tarea No 13 : Derivadas Parciales

(Sección 14.3 en el Stewart 8ª Edición)

Encuentre las primeras derivadas parciales de la función dada:

1	$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$	2	$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
---	-----------------------------	---	---------------------------------

Utilice la derivación implícita para hallar  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$

3	$xy + yz = xz$	4	$x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y + z)$
---	----------------	---	-------------------------------

Halle todas las segundas derivadas parciales de las funciones:

5	$f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$	6	$u(s, t) = e^{-s} \sin t$
---	---------------------------	---	---------------------------

Halle la derivada parcial indicada

7	$f(x, y, z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2$ $f_{xyz} = ?$	8	$u = \ln(x + 2y^2 + 3z^3)$ ; $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = ?$
---	--	---	--

### Respuestas

1	$f_x(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$ $f_y(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$	2	$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$
3	$\frac{y-z}{x-y}$ ; $\frac{x+z}{x-y}$	4	$\frac{x-y-z}{x+z}$ ; $\frac{y-x}{x+z}$
5	$f_{xx} = 12x^2 - 6y^3$ ; $f_{yy} = -18x^2y$ $f_{xy} = -18xy^2 = f_{yx}$	6	$u_{ss} = e^{-s} \sin t$ ; $u_{tt} = -e^{-s} \sin t$ $u_{st} = -e^{-s} \cos t = u_{ts}$
7	$48x^3y^3z^2$	8	$\frac{72yz^2}{(x + 2y^2 + 3z^3)^3}$