Unidad 4 : DERIVADAS PARCIALES

Tema 4.3 : Planos Tangentes y Diferenciales Totales

(Estudiar la Sección 14.4 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 14)

Ecuación del Plano Tangente. Deseamos determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Esta ecuación tendrá la forma: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Podemos arreglarla dividiéndola entre C, y haciendo a=-A/C y b=-B/C, quedándonos en la forma:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

que nos recuerda la forma de la recta tangente a una curva en 2D

$$\underline{\underline{y - y_0 = m(x - x_0)}} \text{ , en donde } \underline{\underline{m = f'(x_0)}}.$$

Si quitamos paréntesis en la ecuación del plano tangente, y calculamos sus derivadas parciales, obtenemos que:

$$z = z_0 + ax - ax_0 + by - by_0 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = a \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b$$

Si cortamos la superficie $z = f(x, y)$, y el plano tangente, con los planos $x = x_0$; $y = y_0$ obtenemos las trazas con ecuaciones $z - z_0 = a(x - x_0)$; $z - z_0 = b(y - y_0)$ en donde $a = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x_0, y_0)$; $b = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x_0, y_0)$ evaluadas en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, obteniendo así finalmente la ecuación del plano tangente:

$$\underline{\underline{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}}$$

<u>Ejemplo</u>.- Halle el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$, en el punto $P(1,1,3)$.

$$f_x(x, y) = 4x , \quad f_x(1,1) = 4 , \quad f_y(x, y) = 2y , \quad f_y(1,1) = 2$$

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \quad ; \quad \underline{4x + 2y - z = 3}$$

<u>Ejemplo</u>.- Halle el plano tangente a la superficie $z = sen(x + y)$, en el punto $P(1,-1,0)$.

$$f_x(x, y) = \cos(x + y) , \; f_x(1,-1) = \cos 0 = 1 , \; f_y(x, y) = \cos(x + y) , \; f_y(1,-1) = 1$$

$$z - 0 = 1(x - 1) + 1(y + 1) \quad ; \quad \underline{x + y - z = 0}$$

Definición de Diferencial Total. Definimos el diferencial de una función de varias variables por analogía al diferencial de una función de una variable:

$$Si\ y = f(x) \quad \rightarrow \quad dy = \frac{df}{dx}dx = f'(x)dx$$

$$si\ z = f(x, y) \quad \rightarrow \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$si\ w = f(x, y, z) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz}} \quad etc.$$

Interpretación Geométrica. Ilustrar la interpretación geométrica del diferencial total con el dibujo de un paraboloide elíptico de la forma $4z + 4x^2 + y^2 = 36$ mostrando como cambia el valor de $z = f(x, y)$, la altura, al movernos del punto $P(1,2,7)$ al punto $Q(2,4,1)$

Ejemplo. Determine el diferencial total de la función $w(x, y, z) = xsen(yz)$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = sen(yz) \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = xz\cos(yz) \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = xy\cos(yz)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$\underline{dw = sen(yz)dx + xz\cos(yz)dy + xy\cos(yz)dz}$$

Ejemplo. Determine el diferencial de volumen por unidad de volumen para una lata cilíndrica de refresco de radio r y altura h.

$$V(r, h) = \pi r^2 h \quad ; \quad dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh \quad ; \quad dV = (2\pi rh)dr + (\pi r^2)dh$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{(2\pi rh)dr}{\pi r^2 h} + \frac{(\pi r^2)dh}{\pi r^2 h} \quad ; \quad \underline{\frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

14.4 Planos Tangentes
14.5 La Regla de la Cadena

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 14 Planos Tangentes

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 14 : Planos Tangentes

(Sección 14.4 del Stewart 8ª Edición)

Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado:

1	$z = y^2 - x^2 \quad ; \quad (-4 , 5 , 9)$	R1	$8x + 10y - z = 9$
2	$z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2} \quad ; \quad (1 , -1 , 1)$	R2	$x - 2y + z = 4$
3	$z = \ln(2x + y) \quad ; \quad (-1 , 3 , 0)$	R3	$2x + y - z = 1$

Encuentre el diferencial total de la función dada:

4	$z = x^2 y^3$	R4	$dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$
5	$u = e^t sen\theta$	R5	$du = e^t sen\theta\, dt + e^t \cos\theta\, d\theta$
6	$w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	R6	$dw = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$