Unidad 4 : DERIVADAS PARCIALES

Tema 4.4 : Regla de la Cadena

(Estudiar la Sección 14.5 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 15)

Regla de la Cadena para una función de una variable que a su vez depende de otra variable.

$$Si \quad y = f(x) \quad ; \quad x = g(t) \quad entonces \quad dy = \frac{dy}{dx}dx \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{ll} y = senx \quad ; & \dfrac{dy}{dx} = \cos x \\ x = 3t^5 \quad ; & \dfrac{dx}{dt} = 15t^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = (\cos x)(15t^4) = 15t^4 \cos(3t^5)$$

$$o\ en\ forma\ equivalente \quad \frac{d}{dt}sen(3t^5) = [\cos(3t^5)](15t^4) = 15t^4 \cos(3t^5)$$

Regla de la Cadena para una función de dos variables que a su vez dependen cada una de ellas de una sola variable.

$$Si \quad z = f(x, y) \quad ; \quad x = g(t) \quad ; \quad y = h(t)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}}$$

Ejemplo:

$$z = x^2 y + 3xy^4 \quad ; \quad x = e^t \quad ; \quad y = sent$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4 \ ; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3 \ ; \frac{dx}{dt} = e^t \ ; \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\underline{\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(e^t) + (x^2 + 12xy^3)(\cos t)}$$

$$\frac{dz}{dt} = (2e^t sent + 3sen^4 t)(e^t) + (e^{2t} + 12e^t sen^3 t)(\cos t)$$

$$\underline{\frac{dz}{dt} = 2e^{2t} sent + 3e^t sen^4 t + e^{2t} \cos t + 12e^t sen^3 t \cos t}$$

<u>Regla de la Cadena para una función de dos variables que a su vez dependen cada una de ellas de otras dos variables</u>.

$$Si \quad z = f(x,y) \quad ; \quad x = g(s,t) \quad ; \quad y = h(s,t)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial s} \quad y \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}$

$$z = e^x seny \quad ; \quad x = st^2 \quad ; \quad y = s^2t$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \, ; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y \, ; \frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \, ; \frac{\partial y}{\partial s} = 2st \, ; \frac{\partial x}{\partial t} = 2st \, ; \frac{\partial y}{\partial t} = s^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(e^x seny\right)\left(t^2\right) + \left(e^x \cos y\right)(2st)$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial s} = \left(e^{st^2} sen\left(s^2t\right)\right)\left(t^2\right) + \left(e^{st^2} \cos\left(s^2t\right)\right)(2st)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(e^x seny\right)(2st) + \left(e^x \cos y\right)\left(s^2\right)$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial t} = \left(e^{st^2} sen\left(s^2t\right)\right)(2st) + \left(e^{st^2} \cos\left(s^2t\right)\right)\left(s^2\right)}}$$

<u>Regla de la Cadena para una función de tres variables que a su vez dependen cada una de ellas de otras tres variables</u>.

$$Si \quad u = f(x,y,z) \quad ; \quad x = g(r,s,t) \quad ; \quad y = h(r,s,t) \quad ; \quad z = k(r,s,t)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$

$$u = x^4 y + y^2 z^3 \quad ; \quad x = rse^t \quad ; \quad y = rs^2 e^{-t} \quad ; \quad z = r^2 ssent$$

$$Calcule \quad \frac{\partial u}{\partial s} \quad cuando\; r = 2\,,\; s = 1\,,\; t = 0 \rightarrow (x = 2, y = 2, z = 0)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(4x^3 y\right)\left(re^t\right) + \left(x^4 + 2yz^3\right)\left(2rse^{-t}\right) + \left(3y^2 z^2\right)\left(r^2 sent\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(4\times 2^3 \times 2\right)\left(2e^0\right) + \left(2^4 + 2\times 2\times 0\right)\left(2\times 2\times 1\times e^0\right) + \left(3\times 2^2 \times 0^2\right)\left(2^2 sen0\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 64\times 2 + 16\times 4 + 0\times 0 = 128 + 64 = 192$$

$E1: Calcule\, \dfrac{\partial w}{\partial s}\,;\dfrac{\partial w}{\partial t}\,;\; para\; w = 2xy\,; \quad x = s^2 + t^2\,; \quad y = \dfrac{s}{t}$

$E2: Calcule\, \dfrac{\partial R}{\partial x}\,;\dfrac{\partial R}{\partial y}\,; \quad cuando\;\; x = y = 1\,;\; para\;\; R = \ln\left(u^2 + v^2 + w^2\right);$

$u = x + 2y\,; \quad v = 2x - y\,; \quad w = 2xy$

$E3: Calcule\, \dfrac{\partial z}{\partial u}\,;\dfrac{\partial z}{\partial v}\,;\dfrac{\partial z}{\partial w} \quad cuando\;\; u = 2\,; v = 1\,; w = 0\,; con\;\; z = x^2 + xy^3\,;$

$x = uv^2 + w^3\,; \quad y = u + ve^w$

$R1: \quad \dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{6s^2 + 2t^2}{t} \quad ; \quad \dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{2st^2 - 2s^3}{t^2}$

$R2: \quad \dfrac{9}{7} \quad ; \quad \dfrac{9}{7}$	$R3: \quad 85 \quad ; \quad 178 \quad ; \quad 54$

Ejemplos de Aplicaciones de la Regla de la Cadena

El voltaje V en un circuito eléctrico sencillo está decreciendo lentamente a medida que se consume la batería. La resistencia R está aumentando lentamente a medida que se calienta el resistor. Utilice la Ley de Ohm, V=IR, para hallar cómo está cambiando la corriente I en el momento cuando R=400 Ω, I=0.08 A, dV/dt=-0.01 V/s, y dR/dt=0.03 Ω/s.

$$I(V,R)=\frac{V}{R}$$

$$dI=\frac{\partial I}{\partial V}dV+\frac{\partial I}{\partial R}dR$$

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt}+\frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt}+\left(\frac{-V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt}+\left(\frac{-IR}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt}+\left(\frac{-I}{R}\right)\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt}=\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}-\frac{I}{R}\frac{dR}{dt}$$

$$=\left(\frac{1}{400}\right)(-0.01)-\left(\frac{0.08}{400}\right)(0.03)$$

$$\frac{dI}{dt}=-3.1\times10^{-5}\ \frac{A}{s}$$

La presión de 1 mol de gas ideal está aumentando a razón de 0.05 kPa/s y la temperatura está subiendo a razón de 0.15 K/s. Utilice la ecuación $PV=8.31T$ para hallar la razón de cambio del volumen cuando la presión sea 20 kPa y la temperatura sea 320 K.

$$V(P,T)=8.31\frac{T}{P}$$

$$dV=\frac{\partial V}{\partial P}dP+\frac{\partial V}{\partial T}dT$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial P}\frac{dP}{dt}+\frac{\partial V}{\partial T}\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=\left(-8.31\frac{T}{P^2}\right)\frac{dP}{dt}+\left(\frac{8.31}{P}\right)\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=-8.31\frac{T}{P^2}\frac{dP}{dt}+\frac{8.31}{P}\frac{dT}{dt}$$

$$=\left(-8.31\frac{320}{400}\right)(0.05)+\left(\frac{8.31}{20}\right)(0.15)$$

$$\frac{dV}{dt}=-0.2701\frac{L}{s}$$

El auto A se desplaza hacia el norte por la carretera 16 y el auto B hacia el oeste por la carretera 83; cada uno se aproxima al cruce de estas carreteras. En cierto momento, el auto A está a 0.3 km del cruce y viaja a 90 km/h mientras que el auto B está a 0.4 km del cruce y viaja a 80 km/h. ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre los autos en ese momento?

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$2s\frac{\partial s}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$2s\frac{\partial s}{\partial y} = 2y \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{y}{s} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-80) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(90)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(-80)(0.4) + (90)(0.3)}{\sqrt{0.4^2 + 0.3^2}}$$

$$\underline{\frac{ds}{dt} = \frac{-59}{0.5} = -118\,\frac{m}{s}}$$

Ejemplo del Teorema de la Función Implícita:

$$Calcule \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad si \quad 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz = 5$$

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{-(6xz - 2xy)}{3x^2 + 6z^2 + 3y} = \frac{2xy - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-\left(-2x^2y + 3z\right)}{3x^2 + 6z^2 + 3y} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

14.5 La Regla de la Cadena
14.6 Vector Gradiente y Derivada Direccional

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 15 La Regla de la Cadena

Teorema de la Función Implícita para una función de una variable	**Teorema de la Función Implícita para una función de dos variables**
$z = F(x,y) = 0 \quad define\ a\ \text{"}y\text{"}$ $implicitamente \quad como:$ $y = f(x) \quad entonces:$ $F(x,y) = f(x) - y = 0$ $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y}}}$	$w = F(x,y,z) = 0 \quad define\ a \quad \text{"}z\text{"}$ $implicitamente \quad como:$ $z = f(x,y) \quad entonces:$ $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z}}}$
<u>Ejemplo:</u> $Si \quad x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1 \quad \rightarrow$ $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} =$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} =$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$	$w = F(x,y,z) = 0 \quad define\ a \quad \text{"}z\text{"}$ $implicitamente \quad como:$ $z = f(x,y) \quad entonces:$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}}}$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No 15 : Regla de la Cadena** (Sección 14.5 del Stewart 8ª Edición)			
Utilice la regla de la cadena para hallar $\frac{dw}{dt}$			
1	$w = xe^{\frac{y}{z}}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$	R1	$e^{\frac{y}{z}}\left[2t - \frac{x}{z} - \frac{2xy}{z^2}\right]$
Utilice la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$			
2	$z = x^2 + xy + y^2$; $x = s + t$; $y = st$	R2	$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x + y + xt + 2yt$ $\frac{\partial z}{\partial t} = 2x + y + xs + 2ys$
3	$z = e^r \cos\theta$; $r = st$; $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$	R3	$\frac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \frac{s\ sen\theta}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right)$ $\frac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \frac{t\ sen\theta}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right)$
:Utilice la regla de la cadena para hallar las derivadas parciales indicadas:			
4	$w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = st$, $y = s\cos t$, $z = s\,sent$ $\frac{\partial w}{\partial s}$; $\frac{\partial w}{\partial t}$; $cuando$ $s = 1$; $t = 0$	R4	2 , 0
5	$z = y^2 \tan x$; $x = t^2uv$; $y = u + tv^2$ $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ $cuando$ $t = 2$, $u = 1$, $v = 0$	R5	0 , 0 , 4
Utilice el teorema de la función implícita para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$			
6	$xy^2 + yz^2 + zx^2 = 3$	R6	$-\frac{y^2 + 2xz}{2yz + x^2}$, $-\frac{2xy + z^2}{2yz + x^2}$