Unidad 4 : DERIVADAS PARCIALES

Tema 4.5 : Vector Gradiente y Derivada Direccional

(Estudiar la Sección 14.6 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 16)

Definición del Vector Gradiente de una función de dos variables

$$Si \quad z = f(x,y) \quad \rightarrow \quad \nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} = \langle f_x \,,\, f_y \rangle$$

Definición del Vector Gradiente de una función de tres variables

$$Si \quad w = f(x,y,z) \quad \rightarrow \quad \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = \langle f_x \,,\, f_y \,,\, f_z \rangle$$

Ejemplo

$$Calcule \quad \nabla f(x,y) \quad y \quad \nabla f(1,2) \quad si \quad f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y \quad ; \quad \underline{\underline{\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y)\hat{\imath} + (-3x + 8y)\hat{\jmath}}}$$

$$f_x(1,2) = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -3 \,;\, f_y(1,2) = -3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 13 \quad ; \quad \underline{\underline{\nabla f(1,2) = -3\hat{\imath} + 13\hat{\jmath}}}$$

Definición de Derivada Direccional

$$\hat{\imath} \cdot \nabla f = \hat{\imath} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \textit{razón de cambio en dirección } \hat{\imath}$$

$$\hat{\jmath} \cdot \nabla f = \hat{\jmath} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \textit{razón de cambio en dirección } \hat{\jmath}$$

$$\hat{k} \cdot \nabla f = \hat{k} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \textit{razón de cambio en dirección } \hat{k}$$

$$\hat{u} \cdot \nabla f = \hat{u} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \right) = D_{\hat{u}} f(x,y,z) \quad \textit{razón de cambio en dirección } \hat{u}$$

$$\textit{Derivada Direccional} \quad \underline{\underline{D_{\hat{u}} f(x,y,z) \equiv \nabla f \cdot \hat{u}}}$$

es la razón de cambio de f en dirección del vector unitario u

Ejemplo: calcule la razón de cambio de la función dada, en una dirección a 30° con el eje X, en el punto especificado:

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2 \quad ; \quad P(1,2) \quad ; \quad D_{\hat{u}} f(1,2) = ?$$

$$\nabla f(x,y) = \langle 3x^2 - 3y \,,\, -3x + 8y \rangle \quad ; \quad \nabla f(1,2) = \langle -3 \,,\, 13 \rangle$$

$$\hat{u} = \langle r\cos\theta \,,\, r sen\theta \rangle = \langle \cos 30 \,,\, sen 30 \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\underline{\underline{D_{\hat{u}} f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \hat{u}}} = \langle -3 \,,\, 13 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2} = \underline{\underline{\frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}}}$$

Ejemplo: calcule la razón de cambio de la función dada, en la dirección del vector dado, en el punto especificado:

$$f(x,y) = x^2 y^3 - 4y \quad ; \quad P(2,-1) \quad ; \quad \vec{v} = 2\hat{i} + 5\hat{j} \quad , \quad D_{\hat{u}} f(2,-1) = ?$$

$$\nabla f(x,y) = \langle 2xy^3 \,,\, 3x^2 y^2 - 4 \rangle \quad ; \quad \nabla f(2,-1) = \langle -4 \,,\, 8 \rangle$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 2 \,,\, 5 \rangle}{\sqrt{4 + 25}} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}} \,,\, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

$$\underline{\underline{D_{\hat{u}} f(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \hat{u}}} = \langle -4 \,,\, 8 \rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}} \,,\, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle = \frac{-8}{\sqrt{29}} + \frac{40}{\sqrt{29}} = \underline{\underline{\frac{32}{\sqrt{29}}}}$$

Ejemplo: calcule la razón de cambio de la función dada, en la dirección del vector dado, en el punto especificado:

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y+z} \quad ; \quad P(4,1,1,) \quad ; \quad \vec{v} = \langle 1,2,3 \rangle$$

$$f_x = \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \quad ; \quad f_y = \frac{-x}{(y+z)^2} = \frac{-4}{4} = -1 \quad ; \quad f_z = \frac{-x}{(y+z)^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{1}{2}, -1, -1 \right\rangle \quad ; \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 1,2,3 \rangle}{\sqrt{1+4+9}} \quad ; \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

$$D_{\hat{u}} f = \nabla f \cdot \hat{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -1, -1 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{-\frac{9}{2\sqrt{14}}}}$$

Magnitud y Dirección de la Máxima Razón de Cambio

La razón de cambio de una función en una dirección definida está dada por la derivada direccional: $D_{\hat{u}} f = \nabla f \cdot \hat{u} = |\nabla f| \cdot |\hat{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$, si variamos el ángulo θ para detectar el valor máximo de la derivada direccional encontramos que para $\theta = 0°$ obtenemos el valor máximo de $\cos\theta = 1$, por lo tanto:

1) El valor máximo de la derivada direccional es igual a: $|\nabla f|$,
2) Este valor máximo está en la dirección del vector: ∇f

Ejemplo. Encuentre la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la que ésta se verifica.

$$f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4 \quad ; \quad (1,1,1)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2xy^3z^4 \ , 3x^2y^2z^4 \ , 4x^2y^3z^3 \rangle \quad ; \quad \nabla f(1,1,1) = \langle 2,3,4 \rangle$$

$$|\nabla f(1,1,1)| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

$$\textit{la máxima razón de cambio es } \sqrt{29} \textit{ y ocurre en la dirección} \langle 2,3,4 \rangle$$

Ejemplo. La temperatura en un punto (x,y,z) está dada por: $T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ donde T se mide en °C y x,y,z en metros. (a) Encuentre la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2,-1,2)$ en dirección hacia el punto $Q(3,-3,3)$. (b) ¿En que dirección aumenta más rápido la temperatura en P? (c) Encuentre la mayor razón de incremento en P.

$$\nabla T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2} \langle -2x,-6y,-18z \rangle \quad ; \quad PQ = \langle 1,-2,1 \rangle \, ; \hat{u} = \frac{\langle 1,-2,1 \rangle}{\sqrt{6}}$$

$$\nabla T(2,-1,2) = 200e^{-4-3-36} \langle -4,6,-36 \rangle = 400e^{-43} \langle -2,3,-18 \rangle \, ; \hat{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

$$(a) \ D_{\hat{u}} f = \nabla T \cdot \hat{u} = 400e^{-43} \langle -2,3,-18 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle = 400e^{-43} \left(\frac{-2-6-18}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= 400e^{-43} \left(\frac{-26}{\sqrt{6}} \right) = \underline{\frac{-10{,}400e^{-43}}{\sqrt{6}} \ °C/m}$$

$$(b) \quad \underline{\langle -2,3,-18 \rangle}$$

$$(c) \quad |\nabla T(2,-1,2)| = 400e^{-43} \sqrt{4+9+324} = \underline{400 \times \sqrt{337} \times e^{-43} \ °C/m}$$

El Vector Gradiente y las Superficies de Nivel.

Si tenemos una familia de superficies de nivel $f(x,y,z)=k$, y el vector de posición $\hat{r}(t)=\langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ describe una curva sobre esa superficie, tenemos que:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=\left\langle f_x, f_y, f_z\right\rangle\cdot\left\langle dx, dy, dz\right\rangle \quad ; \quad \underline{\underline{df=\nabla f\cdot d\hat{r}}}$$

Sobre la familia de curvas de nivel $df=0$, y como el vector $d\vec{r}$ es tangente a la curva, tenemos que $\nabla f\cdot d\vec{r}=0$, por lo tanto el <u>vector gradiente es perpendicular a las superficies de nivel $f(x,y,z)=k$</u>

Por esta razón el vector gradiente nos sirve para construir la ecuación del plano tangente y de la recta normal.

Si aplicamos este mismo argumento a una familia de curvas de nivel $f(x,y)=k$, obtenemos que <u>vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel $f(x,y)=k$</u>

Ejemplo: Halle las ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

$$x^2-2y^2-3z^2+xyz=4 \quad ; \quad P(3,-2,-1)$$

$$\nabla f(x,y,z)=\langle 2x+yz,-4y+xz,-6z+xy\rangle \quad ; \quad \nabla f(3,-2,-1)=\langle 6+2,8-3,6-6\rangle$$

$$\nabla f(3,-2,-1)=\langle 8,5,0\rangle \quad ; \quad 8(x-3)+5(y+2)+0(z+1)=0$$

$$la\ ecuación\ del\ plano\ \text{tan}\ gente\ es\ \underline{8x+5y=14}$$

$$las\ ecuaciones\ de\ la\ recta\ normal\ son\quad \underline{x=3+8t\quad ;\quad y=-2+5t\quad ;\quad z=-1}$$

Propiedades Importantes del Vector Gradiente

1) $\nabla f = \langle f_x , f_y , f_z \rangle$

2) $D_{\hat{u}} f = \nabla f \cdot \hat{u}$

3) $|\nabla f| = valor\ máximo\ de\ D_{\hat{u}} f$

4) $\nabla f\ es\ la\ dirección\ del\ valor\ máximo\ de\ D_{\hat{u}} f$

5) $df = \nabla f \cdot d\vec{r}$

6) $\nabla f(x, y)\ es\ perpendicular\ a\ las\ curvas\ de\ nivel\ f(x, y) = k$

7) $\nabla f(x, y, z)\ es\ perpendicular\ a\ las\ \sup erficies\ de\ nivel\ f(x, y, x) = k$

8) $\nabla f\ nos\ ayuda\ a\ encontrar\ el\ plano\ \tan gente\ y\ la\ recta\ normal$

9) $los\ procesos\ naturales\ ocurren\ en\ la\ dirección\ de\ \nabla f$

10) $Divergencia\ del\ campo\ vectorial\ \vec{F} = div\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

11) $Rotacional\ del\ campo\ vectorial\ \vec{F} = rot\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

Para la próxima clase estudiar las secciones

14.6 Vector Gradiente y Derivada Direccional
14.7 Valores Máximos y Mínimos

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 16 Derivada Direccional

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 16 : Derivada Direccional

(Sección 14.6 del Stewart 8ª Edición)

Encuentre la derivada direccional de f en el punto dado, en la dirección indicada por el ángulo θ.

1	$f(x,y)=\sqrt{5x-4y}$, $(4,1)$, $\theta=\dfrac{-\pi}{6}$

a) Encuentre el gradiente de f, b) evalúe el gradiente en el punto P, c) encuentre la razón de cambio de f en P, en la dirección del vector $\hat{u}$

2	$f(x,y)=5xy^2-4x^3y$, $P(1,2)$, $\hat{u}=\left\langle \dfrac{5}{13},\dfrac{12}{13}\right\rangle$
3	$f(x,y,z)=xy^2z^3$, $P(1,-2,1)$, $\hat{u}=\left\langle \dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$

Halle la derivada de la función en el punto dado en la dirección del vector $\vec{v}$

4	$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(1,2,-2)$, $\vec{v}=\langle -6,6,-3\rangle$
5	$g(x,y,z)=x\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{z}\right)$, $(1,2,-2)$, $\vec{v}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

Encuentre la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la que ésta acontece.

6	$f(x,y)=sen(xy)$, $(1,0)$
7	$f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{z}$, $(4,3,-1)$
8	Suponga que, en cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por: $V(x,y,z)=5x^2-3xy+xyz$. (a) Encuentre la razón de cambio del potencial en el punto $P(3,4,5)$, en la dirección del vector $\vec{v}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$. (b) ¿En que dirección cambia V más rápidamente en P? (c)¿Cuál es la mayor razón de cambio en P?

Halle las ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.	
9	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \quad ; \quad P(4,-1,1)$
10	$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4 \quad ; \quad P(1,0,1)$

Respuestas
$R1: \quad \frac{5}{16}\sqrt{3} + \frac{1}{4}$
$R2: \quad (a)\,\nabla f(x,y) = \left\langle 5y^2 - 12x^2y \, , 10xy - 4x^3 \right\rangle \quad , \quad (b)\left\langle -4 \, , 16 \right\rangle \quad , \quad (c)\,\frac{172}{13}$
$R3: \quad (a)\,\nabla f(x,y,z) = \left\langle y^2z^3 \, , 2xyz^3 \, , 3xy^2z^2 \right\rangle \quad , \quad (b)\left\langle 4 \, , -4 \, , 12 \right\rangle \quad , \quad (c)\,\frac{20}{\sqrt{3}}$
$R4: \quad \frac{4}{9}$
$R5: \quad \frac{-\pi}{4\sqrt{3}}$
$R6: \quad 1 \quad ; \quad \left\langle 0 \, , 1 \right\rangle$
$R7: \quad \sqrt{11} \quad ; \quad \left\langle 1 \, , -1 \, , -3 \right\rangle$
$R8: \quad (a)\,\frac{32}{\sqrt{3}} \quad ; \quad (b)\left\langle 38 \, , 6 \, , 12 \right\rangle \quad ; \quad (c)\,2\sqrt{406}$
$R9: \quad (a)\,4x - 2y + 3z = 21 \quad ; \quad (b)\,\frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{6}$
$R10: \quad (a)\,3x - y + z = 4 \quad ; \quad (b)\,\frac{x-1}{3} = -y = z - 1$