

Unidad 4 : DERIVADAS PARCIALES

Tema 4.6 : Valores Máximos y Mínimos

(Estudiar la Sección 14.7 en el Stewart 5ª Edición; Hacer la Tarea No. 17)

Definición de Máximo Local $f(x, y)$ tiene un valor máximo local en el punto (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) dentro de un círculo con centro en (a, b) . El número $f(a, b)$ se llama valor máximo local, y el punto (a, b) se llama punto crítico.

Definición de Mínimo Local $f(x, y)$ tiene un valor mínimo local en el punto (a, b) si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) dentro de un círculo con centro en (a, b) . El número $f(a, b)$ se llama valor mínimo local, y el punto (a, b) se llama punto crítico.

Definición de Extremos Absolutos Si las desigualdades anteriores son válidas para todos los puntos del dominio de $f(x, y)$, entonces se tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto.

Criterio para Valores Extremos Si (a, b) tiene un máximo o un mínimo local en el punto (a, b) , entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, ya que en este caso el plano tangente $z - z_0 = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ nos queda el plano horizontal $z = z_0$. Como el gradiente está dado por $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$, este criterio se puede expresar como $\nabla f(a, b) = \langle 0, 0 \rangle$

Criterio de la Segunda Derivada Si (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$, esto es si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, y si definimos

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2, \text{ entonces:}$$

- (a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo local
- (b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(a, b)$ es un máximo local
- (c) Si $D < 0$ entonces $f(a, b)$ es un punto silla
- (d) Si $D = 0$ entonces este criterio no da información

Ejemplo: Encuentre los valores extremos locales y puntos silla de la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 2x - 2 = 0 \\ f_y(x, y) = 2y - 6 = 0 \end{array} \right\} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad (1,3) \text{ es el punto crítico}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad ; \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad ; \quad f_{xy} = 0 \quad ; \quad D = 4$$

$$y \text{ como } D > 0 \quad y \quad f_{xx} > 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{f(1,3) = 4}} \quad \text{es un m\u00ednimo}$$

Ejemplo: Encuentre los valores extremos locales y puntos silla de la funci\u00f3n:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$$

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ f_y = 3y^2 - 6y = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y^2 - 2y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x+1) = 0 \\ y(y-2) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3; x = -1 \\ y = 0; y = 2 \end{array} \right\}$$

$$f_{xx} = 6x - 6; \quad f_{yy} = 6y - 6; \quad f_{xy} = 0; \quad D = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2; \quad D = 36(x-1)(y-1)$$

(x, y)	D	f_{xx}	$f(x, y)$	<i>extremo</i>
(3,0)	$-72 < 0$	$12 > 0$	$\underline{f(3,0) = -27}$	<u>p. silla</u>
(3,2)	$+72 > 0$	$12 > 0$	$\underline{f(3,2) = -31}$	<u>m\u00ednimo</u>
(-1,0)	$+72 > 0$	$-12 < 0$	$\underline{f(-1,0) = 5}$	<u>m\u00e1ximo</u>
(-1,2)	$-72 < 0$	$-12 < 0$	$\underline{f(-1,2) = 1}$	<u>p. silla</u>

Ejemplo: Encuentre los valores extremos locales y puntos silla de la funci\u00f3n:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^3 = y \\ y^3 = x \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (y^3)^3 = y \\ y(y^4 - 1)(y^4 + 1) = 0 \\ y^9 - y = 0 \\ y(y^4 - 1)(y^4 + 1) = 0 \end{array} \right\}$$

$$y(y^2 - 1)(y^2 + 1)(y^4 + 1) = 0 \quad ; \quad y(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)(y^4 + 1) = 0 \quad ; \quad y = -1, 0, 1$$

$$f_{xx} = 12x^2 \quad ; \quad f_{yy} = 12y^2 \quad ; \quad f_{xy} = -4 \quad ; \quad D = 144x^2y^2 - 16$$

(x, y)	D	f_{xx}	$f(x, y)$	<i>extremo</i>
(0,0)	$-16 < 0$	0	$\underline{f(0,0) = 1}$	<u>p. silla</u>
(1,1)	$128 > 0$	$12 > 0$	$\underline{f(1,1) = -1}$	<u>m\u00ednimo</u>
(-1,-1)	$128 > 0$	$12 > 0$	$\underline{f(-1,-1) = -1}$	<u>m\u00ednimo</u>

Ejemplo. Encuentre tres números positivos, diferentes de cero, cuya suma sea 100 y cuyo producto sea un máximo.

$$S(x, y, z) = x + y + z = 100 \rightarrow z = 100 - x - y$$

$$P(x, y, z) = xyz = xy(100 - x - y) = 100xy - x^2y - xy^2$$

$$P_x = 100y - 2xy - y^2 = 0 \rightarrow y(100 - 2x - y) = 0 \rightarrow 100 = 2x + y$$

$$P_y = 100x - x^2 - 2xy = 0 \rightarrow x(100 - x - 2y) = 0 \rightarrow 100 = x + 2y$$

$$P_{xx} = -2y, \quad P_{yy} = -2x, \quad P_{xy} = 100 - 2x - 2y, \quad D = 4xy - (100 - 2x - 2y)^2$$

$$x = \frac{100}{3}, \quad y = \frac{100}{3}, \quad z = \frac{100}{3}, \quad D = \frac{30,000}{9} > 0, \quad P_{xx} = \frac{-200}{3} < 0$$

$$P\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)\left(\frac{100}{3}\right)\left(\frac{100}{3}\right) = 37,037 \text{ es un máximo}$$

Ejemplo. Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes, que pueda estar inscrita en el elipsoide: $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$

$$V(x, y, z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$z = 3\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V(x, y) = (8xy) \left[3\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$V(x, y) = 24xy \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_x = \frac{-6x^2y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}} + 24y\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2} = 0$$

$$V_y = \frac{-24xy^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}} + 24x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2} = 0$$

$$-6y(2x^2 + 4y^2 - 4) = 0$$

$$-x(8y^2 + x^2 - 4) = 0$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad z = \sqrt{3}$$

$$V = 8\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}) \rightarrow V = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular situada en el primer octante, con tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano:

$$x + 2y + 3z = 6.$$

$$V(x, y, z) = xyz \quad , \quad x = 6 - 2y - 3z \quad , \quad V(y, z) = yz(6 - 2y - 3z)$$

$$V(y, z) = 6yz - 2y^2z - 3yz^2 \quad ,$$

$$V_y = 6z - 4yz - 3z^2 = 0 \quad , \quad V_z = 6y - 2y^2 - 6yz = 0$$

$$z(6 - 4y - 3z) = 0 \quad , \quad y(6 - 2y - 6z) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4y + 3z = 6 \\ 2y + 6z = 6 \end{array} \right\} z = \frac{2}{3} \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad V = xyz = (2)(1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Ejemplo Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de $32,000 \text{ cm}^3$. Encuentre las dimensiones que hagan mínima la cantidad de cartón utilizado.

$$V(x, y, z) = xyz = 32000 \quad \rightarrow \quad z = \frac{32000}{xy} \quad ; \quad A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

$$A(x, y) = xy + 2x\left(\frac{32000}{xy}\right) + 2y\left(\frac{32000}{xy}\right) \quad ; \quad A(x, y) = xy + \frac{64000}{y} + \frac{64000}{x}$$

$$A_x = y - \frac{64000}{x^2} = 0 \quad ; \quad A_y = x - \frac{64000}{y^2} = 0 \quad ; \quad y = \frac{64000}{x^2} \quad ; \quad x = \frac{64000}{y^2}$$

$$64000y = y^4 \quad , \quad y(y^3 - 64000) = 0 \quad ; \quad \underline{y = 40} \quad , \quad \underline{x = 40} \quad , \quad \underline{z = 20}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

14.7 Valores Máximos y Mínimos

14.8 Multiplicadores de Lagrange

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 17 Valores Máximos y Mínimos

Ma-817 : MATEMÁTICAS III PARA INGENIERIA

Tarea No 17 : Valores Máximos y Mínimos

(Sección 14.7 del Stewart 5ª Edición)

Encuentre los valores máximo y mínimo locales y puntos silla de la función dada. Si el lector cuenta con un software de gráficas en tres dimensiones, trace la gráfica de la función con un dominio y un punto de vista que deje ver todos los aspectos importantes de la función.

$P1: f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$	$R1: \text{máximo } f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 11$
$P2: f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$	$R2: \text{mínimo } f(0,0) = 4$ $\text{puntos silla } f(\pm\sqrt{2}, -1) = 5$
$P3: f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$	$R3: \text{mínimo en } f(-2,1) = 15$
$P4: f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$	$R4: \text{máximo } f(-1,-1) = 10$ $\text{mínimo } f(1,1) = -10$ $\text{punto silla } f(1,-1) = -6$ $\text{punto silla } f(-1,1) = 6$
$P5: f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$	$R5: \text{mínimo } f(3,1) = -14$
$P6: f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$	$R6: \text{máximo } f(0,0) = 2$ $\text{mínimo } f(0,2) = -2$ $\text{puntos silla } f(\pm 1,1) = 0$