Unidad 4 : DERIVADAS PARCIALES

Tema 4.7 : Multiplicadores de Lagrange

(Estudiar la Sección 14.8 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 18)

Ejemplo ilustrativo Para mostrar gráficamente el concepto de los valores extremos sujetos a restricciones, y para deducir la ecuación básica del método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$, analizaremos los valores extremos de la función $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ con y sin la restricción $g(x,y) = x + y = 3$

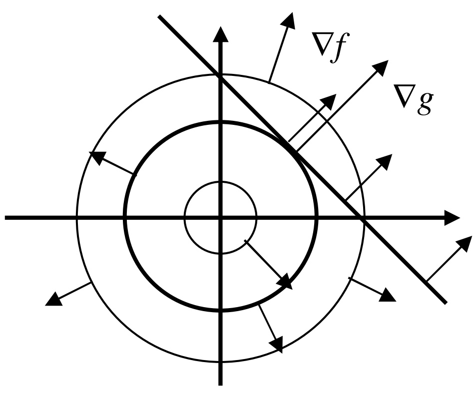
Extremos sin restricciones

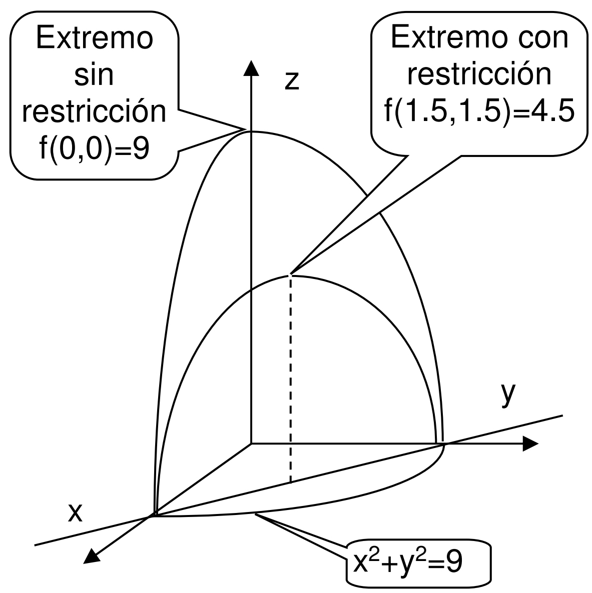
$$\left.\begin{aligned} f_x &= -2x = 0 \\ f_y &= -2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad PC(0,0)$$

$$D = (-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$$

$$f_{xx} = -2$$

$$f(0,0) = 9 \textit{ es un máximo}$$





$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$$

Ejemplo Determine los valores extremos de la función dada sujeta a la restricción especificada. $f(x,y,z) = x + 3y + 5z \quad ; \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$f_x = \lambda g_x \rightarrow 1 = \lambda(2x) \cdots (1)$$
$$f_y = \lambda g_y \rightarrow 3 = \lambda(2y) \cdots (2)$$
$$f_z = \lambda g_z \rightarrow 5 = \lambda(2z) \cdots (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{1}{3} = \frac{\lambda(2x)}{\lambda(2y)} \rightarrow y = 3x$$
$$\frac{(1)}{(3)}: \quad \frac{1}{5} = \frac{\lambda(2x)}{\lambda(2z)} \rightarrow z = 5x$$

$x^2+(3x)^2+(5x)^2=1$ $x^2+9x^2+25x^2=1$ $35x^2=1$ $x=\dfrac{\pm1}{\sqrt{35}}=\dfrac{\pm\sqrt{35}}{35}$	$x=\dfrac{\pm\sqrt{35}}{35}\quad;\quad y=\dfrac{\pm3\sqrt{35}}{35}\quad;\quad z=\dfrac{\pm5\sqrt{35}}{35}$ $f\left(\dfrac{\sqrt{35}}{35},\dfrac{3\sqrt{35}}{35},\dfrac{5\sqrt{35}}{35}\right)=\dfrac{\sqrt{35}}{35}+\dfrac{9\sqrt{35}}{35}+\dfrac{25\sqrt{35}}{35}=\sqrt{35}$ *es el valor máximo* $f\left(\dfrac{\sqrt{35}}{35},\dfrac{3\sqrt{35}}{35},\dfrac{5\sqrt{35}}{35}\right)=\dfrac{-\sqrt{35}}{35}-\dfrac{9\sqrt{35}}{35}-\dfrac{25\sqrt{35}}{35}=-\sqrt{35}$ *es el valor* min *imo*

Ejemplo Determine las dimensiones de una caja rectangular sin tapa para que su volumen seas máximo, si su área superficial debe tener el valor de 12.

$$V(x,y,z)=xyz\quad;\quad A(x,y,z)=xy+2xz+2yz=12$$

$V_x=\lambda A_x\rightarrow yz=\lambda(y+2z)\cdots(1)$ $V_y=\lambda A_y\rightarrow xz=\lambda(x+2z)\cdots(2)$ $V_z=\lambda A_z\rightarrow xy=\lambda(2x+2y)\cdots(3)$	$\dfrac{(1)}{(2)}:\quad \dfrac{yz}{xz}=\dfrac{\lambda(y+2z)}{\lambda(x+2z)}\rightarrow y(x+2z)=x(y+2z)$ $xy+2yz=xy+2xz\rightarrow 2yz=2xz\rightarrow \underline{\underline{y=x}}$
$xy+2xz+2yz=12$ $x(x)+x(x)+x(x)=12$ $3x^2=12\quad\rightarrow\quad x^2=4$ $\underline{\underline{x=2\quad;\quad y=2\quad;\quad z=1}}$	$\dfrac{(1)}{(3)}:\quad \dfrac{yz}{xy}=\dfrac{\lambda(y+2z)}{\lambda(2x+2y)}\rightarrow z(2x+2y)=x(y+2z)$ $2xz+2yz=xy+2xz\rightarrow 2yz=xy\rightarrow \underline{\underline{2z=x}}$

<u>Para la próxima clase estudiar las secciones</u>

14.8 Multiplicadores de Lagrange
15.1 Integrales Dobles sobre Rectángulos
15.2 Integrales Iteradas

<u>Tarea para entregar la próxima clase</u>

Tarea No. 18 Multiplicadores de Lagrange

Ejemplo Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular situada en el primer octante, con tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano: $x+2y+3z=6$.

$$V(x,y,z)=xyz$$
$$g(x,y,z)=x+2y+3z=6$$
$$V_x=\lambda g_x \to \quad yz=\lambda \quad (1)$$
$$V_y=\lambda g_y \to \quad xz=2\lambda \quad (2)$$
$$V_z=\lambda g_z \to \quad xy=3\lambda \quad (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{yz}{xz}=\frac{\lambda}{2\lambda}\to y=\frac{x}{2}$$
$$\frac{(1)}{(3)}: \quad \frac{yz}{xy}=\frac{\lambda}{3\lambda}\to z=\frac{x}{3}$$
$$x+x+x=6\to 3x=6\,,\ y=1\,,\ z=2/3$$
$$V=(2)(1)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

Ejemplo Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32,000 cm[3]. Encuentre las dimensiones que hagan mínima la cantidad de cartón utilizado.

$$A(x,y,z)=xy+2xz+2yz$$
$$V(x,y,z)=xyz=32000$$
$$A_x=\lambda V_x \to \quad y+2z=\lambda(yz) \quad (1)$$
$$A_y=\lambda V_y \to \quad x+2z=\lambda(xz) \quad (2)$$
$$A_z=\lambda V_z \to \quad 2x+2y=\lambda(xy) \quad (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{y+2z}{x+2z}=\frac{\lambda(yz)}{\lambda(xz)}\to y=x$$
$$\frac{(1)}{(3)}: \quad \frac{y+2z}{2x+2y}=\frac{\lambda(yz)}{\lambda(xy)}\to z=\frac{x}{2}$$
$$(x)(x)\left(\frac{x}{2}\right)=32000\to$$
$$x=40\,,\ y=40\,,\ z=20$$

Ejemplo. Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes, que pueda estar inscrita en el elipsoide: $9x^2+36y^2+4z^2=36$

$$V(x,y,z)=(2x)(2y)(2z)=8xyz$$
$$g(x,y,z)=9x^2+36y^2+4z^2=36$$
$$V_x=\lambda g_x \to \quad 8yz=\lambda(18x) \quad (1)$$
$$V_y=\lambda g_y \to \quad 8xz=\lambda(72y) \quad (2)$$
$$V_z=\lambda g_z \to \quad 8xy=\lambda(8z) \quad (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{8yz}{8xz}=\frac{\lambda(18x)}{\lambda(72y)}\to y=\frac{x}{2}$$
$$\frac{(1)}{(3)}: \quad \frac{8yz}{8xy}=\frac{\lambda(18x)}{\lambda(8z)}\to z=\frac{3}{2}x$$
$$9x^2+36\left(\frac{x^2}{4}\right)+4\left(\frac{9x^2}{4}\right)=36$$
$$x=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad y=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad z=\frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$V=8\left(2/\sqrt{3}\right)\left(1/\sqrt{3}\right)\left(3/\sqrt{3}\right)=16/\sqrt{3}$$

Comparación del método normal y el método alternativo

$f(x,y,z)$	Función a maximizar o minimizar
$g(x,y,x)=0$	Función de restricción

Método Normal

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$
$$\langle f_x, f_y, f_z \rangle = \lambda \langle g_x, g_y, g_z \rangle$$
$$\langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle \lambda g_x, \lambda g_y, \lambda g_z \rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$f_x = \lambda g_x$$
$$f_y = \lambda g_y$$
$$f_z = \lambda g_z$$
$$g = 0$$

Método Alternativo

$$L = f - \lambda g$$
$$L_x = 0$$
$$L_y = 0$$
$$L_z = 0$$
$$L_\lambda = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$f_x - \lambda g_x = 0$$
$$f_y - \lambda g_y = 0$$
$$f_z - \lambda g_z = 0$$
$$-g = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$f_x = \lambda g_x$$
$$f_y = \lambda g_y$$
$$f_z = \lambda g_z$$
$$g = 0$$

Ejemplo: Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular situada en el primer octante, con tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano: $x + 2y + 3z = 6.$

$$V(x,y,z) = xyz$$
$$g(x,y,z) = x + 2y + 3z = 6$$
$$L = V - \lambda g$$
$$L = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$$
$$L_x = yz - \lambda = 0$$
$$L_y = xz - 2\lambda = 0$$
$$L_z = xy - 3\lambda = 0$$
$$L_\lambda = -(x + 2y + 3z - 6) = 0$$

$$\lambda = yz$$
$$xz = 2yz$$
$$xy = 3yz$$

$$y = \frac{x}{2} \quad ; \quad z = \frac{x}{3}$$

$$2yz - xz = 0$$
$$3yz - xy = 0$$

$$x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right) = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = 2,\ y = 1,\ z = \frac{2}{3}$$

$$z(2y - x) = 0$$
$$y(3z - x) = 0$$

$$V = (2)(1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 18 : Multiplicadores de Lagrange

(Sección 14.8 del Stewart 8ª Edición)

Utilice multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo de la función dada, sujeta a la restricción dada.

$P1: \quad f(x,y) = x^2 - y^2$ $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$	$R1: \quad \textit{máximos}\ f(\pm 1,0) = 1$ $\textit{mínimos}\ f(0,\pm 1) = -1$
$P2: \quad f(x,y) = x^2 y$ $g(x,y) = x^2 + 2y^2 = 6$	$R2: \quad \textit{máximos}\ f(\pm 2,1) = 4$ $\textit{mínimos}\ f(\pm 2,-1) = -4$
$P3: \quad f(x,y,z) = 2x + 6y + 10z$ $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 35$	$R3: \quad \textit{máximo en}\ f(1,3,5) = 70$ $\textit{mínimo en}\ f(-1,-3,-5) = -70$
$P4: \quad f(x,y,z) = xyz$ $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$	$R4: \textit{máximo}\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ , \textit{mínimo}\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$
$P5: \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 = 1$	$R5: \quad \textit{máximo}\ \sqrt{3}\ , \quad \textit{mínimo}\ 1$
$P6: \quad f(x,y,z,t) = x + y + z + t$ $g(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$	$R6: \quad \textit{máximo}\ f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = 2$ $\textit{mínimo}\ f\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{2}\right) = -2$