Unidad 5 : INTEGRALES MÚLTIPLES

Tema 5.2 : Integrales Iteradas sobre Rectángulos

(Estudiar la Sección 15.2 en el Stewart 5ª Edición; Hacer la Tarea No. 19)

Integrales Iteradas : Teorema de Fubini

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$\textit{en donde } \Re = \{(x,y) \mid a \le x \le b\,,\, c \le y \le d\}$$

Ejemplo 1:

$$(a)\quad \int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx = \int_0^3 \left[2x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{27}{3} = \frac{27}{2}$$

$$(b)\quad \int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_0^3 dy = \int_1^2 \left[\frac{27}{3} y - 0 \right] dy = 9\left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = 9\cdot\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{27}{2}$$

Ejemplo 2

Evalúe la integral $\iint_{\Re} (x - 3y^2)\,dA$ sobre la región $\Re = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \end{matrix} \right\}$

$$\iint_{\Re} (x-3y^2)\,dA = \int_0^2 \int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy - y^3 \right]_1^2 dx = \int_0^2 [(2x-8)-(x-1)]\,dx$$

$$= \int_0^2 [x-7]\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = (2-14)-(0-0) = -12$$

Ejemplo 3: Evalúe la integral $\iint_{\Re} ysen(xy)dA$ sobre la región $\Re = [1,2]\times[0,\pi]$

$$para\ resolver\ la\ \text{int}egral\ \int_1^2\int_0^\pi ysen(xy)\,dy\,dx\ se\ tiene\ que\ \text{int}egrar\ \ por\ \ partes$$

$$en\ cambio\ la\ \text{int}egral\quad \int_0^\pi\int_1^2\ ysen(xy)\,dx\,dy\quad sale\ directa\ como\ sigue:$$

$$\int_0^\pi\int_1^2\ \underbrace{ysen(xy)}_{\substack{u=xy\\du=ydx}}\,dx\,dy = \int_0^\pi\ \left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^\pi\left[-\cos(2y)+\cos(y)\right]dy$$

$$=\left[\frac{-sen(2y)}{2}+sen(y)\right]_{y=0}^{y=\pi} = 0$$

Ejemplo 4: Encuentre el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico $x^2+2y^2+z=16$, los planos de coordenadas, y los planos $x=2$, $y=2$.

$$V=\iint_{\Re} f(x,y)dA = \int_0^2\int_0^2\ \left[16-x^2-2y^2\right]dy\,dx = \int_0^2\left[16y-x^2y-\frac{2y^3}{3}\right]_0^2dx$$

$$=\int_0^2\left[32-2x^2-\frac{16}{3}\right]dx = \int_0^2\left[\frac{80}{3}-2x^2\ \right]dx = \left[\frac{80x}{3}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$=\frac{1}{3}\left[(160-16)-(-0-0)\right]=\frac{144}{3}=48$$

Para estar seguros de que la respuesta representa el volumen debajo de la superficie, tenemos que comprobar, mediante una gráfica tridimensional, que la superficie está totalmente arriba de la región rectangular dada.

Para la próxima clase estudiar las secciones

15.2 Integrales Iteradas

15.3 Integrales Dobles sobre Regiones Generales

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 19 Integrales Iteradas

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No 19 : Integrales Iteradas** (Sección 15.2 del Stewart 5ª Edición)	
En los problemas 1 al 4 calcule la integral iterada:	
$P1: \quad \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} senx \cos y dydx$	$R1: \quad 1$
$P2: \quad \int_1^4\int_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dydx$	$R2: \quad \frac{21}{2}\ln 2$
$P3: \quad \iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}dA \quad ; \quad R=\left\{(x,y)\middle\vert \begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ -3\le y\le 3\end{array}\right\}$	$R3: \quad 9\ln 2$
$P4: \quad \iint_R \frac{1}{x+y}dA \quad ; \quad R=[1,2]\times[0,1]$	$R4: \quad \ln\frac{27}{16}$
P5: Halle el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$ y arriba del cuadrado $R=[-1,1]\times[-2,2]$	$R5: \quad \frac{166}{27}$
P6: Halle el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante, limitado por el cilindro $z=9-y^2$ y el plano $x=2$	$R6: \quad 36$