

## Unidad 5 : INTEGRALES MÚLTIPLES

### Tema 5.3 : Integrales Dobles en Regiones Generales

(Estudiar la Sección 15.2 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 20)

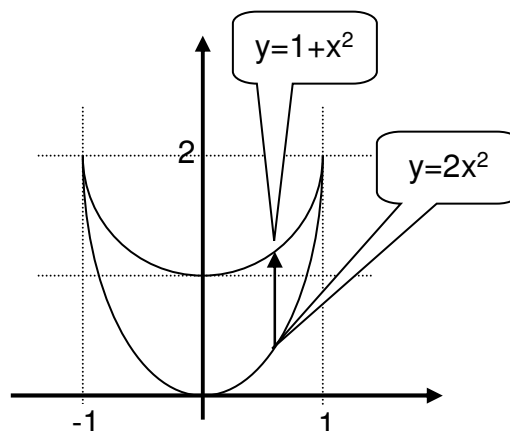
Cuando se va a calcular una integral doble en una región general, no rectangular, debemos de distinguir dos casos diferentes: (a) Regiones Tipo I, en las que debe integrarse primero la variable  $y$ , y (b) Regiones Tipo 2, en las que debe integrarse primero la variable  $x$ .

Ambas regiones se ilustran gráficamente, y simbólicamente, en la Tabla de la página 81. Esta tabla debe estudiarse detenidamente antes de proceder a resolver los ejercicios siguientes.

**Ejemplo 1** Evalúe la integral doble

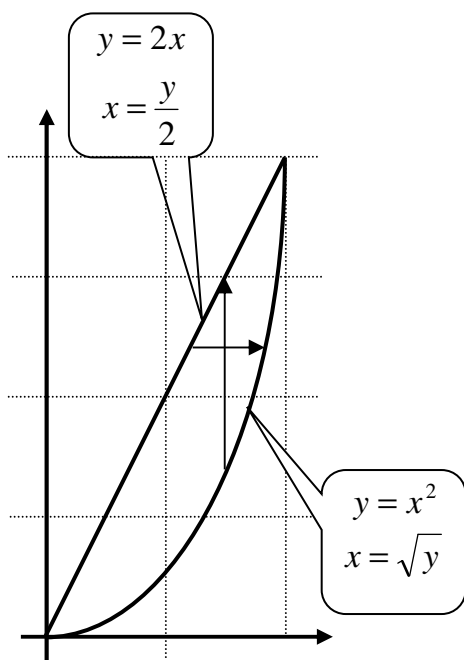
$\iint_D (x+2y)dA$ , en donde  $D$  es la región limitada por las parábolas  $y = 2x^2$ ;  $y = 1+x^2$

Para determinar cual variable conviene integrar primero, debemos de dibujar la región de integración y determinar si es del Tipo I o es del Tipo II.



$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dy dx &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{2x^2}^{1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ x(1+x^2) + (1+x^2)^2 \right\} - \left\{ x(2x^2) + (2x^2)^2 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ x + x^3 + 1 + 2x^2 + x^4 \right\} - \left\{ 2x^3 + 4x^4 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ -3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1 \right] dx = \left[ \frac{-3x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left[ \frac{-3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right] - \left[ \frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right] = -\frac{6}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{-18 + 20 + 30}{15} = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2** Encuentre el volumen del sólido debajo del paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y sobre la región  $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 2x \end{array} \right\}$ . (a) Haga el cálculo tomando la región como Tipo II, (b) haga el cálculo tomando la región como Tipo I.



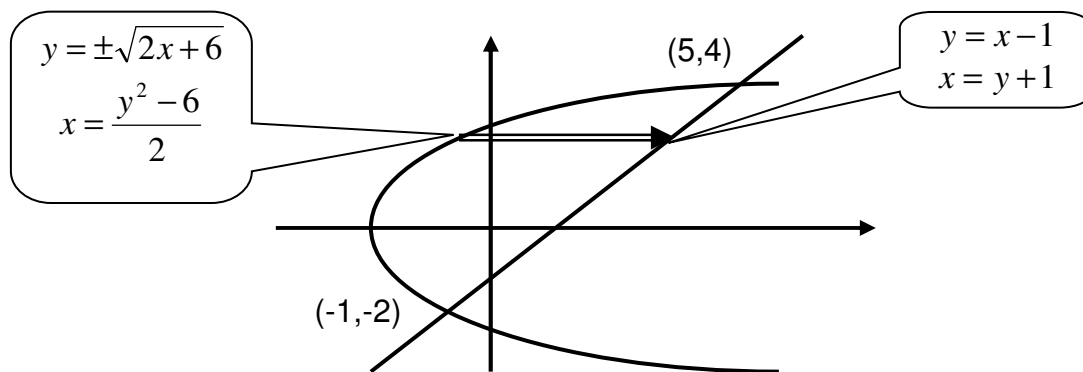
Si integramos primero la variable  $y$ , los límites de  $y$  van del valor inferior  $y = x^2$  al valor superior  $y = 2x$

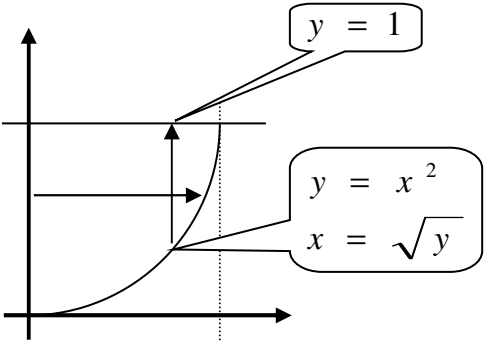
$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx = \dots = \frac{216}{35}$$

Si integramos primero la variable  $x$ , los límites de  $x$  van del valor inferior  $x = \frac{y}{2}$  al valor superior  $x = \sqrt{y}$

$$V = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy = \dots = \frac{216}{35}$$

**Ejemplo 3.** Evalúe la integral  $\iint_D xy \, dA$  en donde  $D$  es la región limitada por la recta  $y = x - 1$ , y la parábola  $y^2 = 2x + 6$



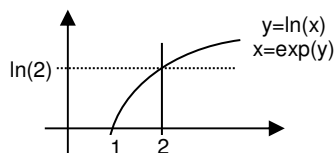
$y_1 = y_2$ $x - 1 = \sqrt{2x + 6}$ $x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ $x^2 - 4x - 5 = 0$ $(x - 5)(x + 1) = 0$ $x_1 = -1 \quad ; \quad y_1 = -2$ $x_2 = +5 \quad ; \quad y_2 = +4$ $(-1, -2) \quad y \quad (5, 4)$	$\iint_D xy \, dA = \int_{-2}^4 \int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} xy \, dx \, dy = \dots = 36$
<p><b>Ejemplo 4:</b> Evalúe la integral <math>\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \operatorname{sen}(y^3) \, dy \, dx</math>, invirtiendo el orden de integración.</p>	
	$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \operatorname{sen}(y^3) \, dx \, dy =$ $\int_0^1 \left[ \frac{x^4}{4} \operatorname{sen}(y^3) \right]_0^{\sqrt{y}} \, dy =$ $\frac{1}{4} \int_0^1 [y^2 \operatorname{sen}(y^3)] \, dy = \frac{1}{12} [-\cos(y^3)]_0^1 =$ $\frac{-1}{12} [\cos(1) - 1] = \frac{1 - \cos(1)}{12}$
<p><b><u>Para la próxima clase estudiar las secciones</u></b>  15.2 Integrales Dobles sobre Regiones Generales  15.3 Integrales Dobles en Coordenadas Polares</p> <p><b><u>Tarea para entregar la próxima clase</u></b>  Tarea No. 20 Integrales Dobles sobre Regiones Generales</p>	

**Ejercicios para la clase de cambio de orden de integración en integrales dobles.**

**Trace la región de integración y cambie el orden de integración**

Ejercicio 5:

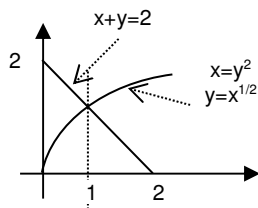
$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$$



$$\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y) dx dy$$

Ejercicio 6:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy$$



$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx$$

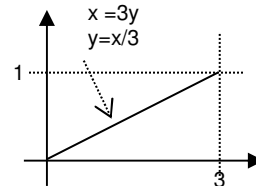
**Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración**

Ejercicio 7:

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

$$\int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} dy dx$$

$$R: (e^9 - 1)/6$$

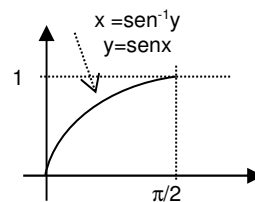


Ejercicio 8:

$$\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dy dx$$

$$R: (2\sqrt{2} - 1)/3$$

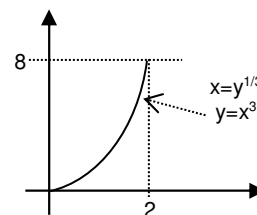


Ejercicio 9:

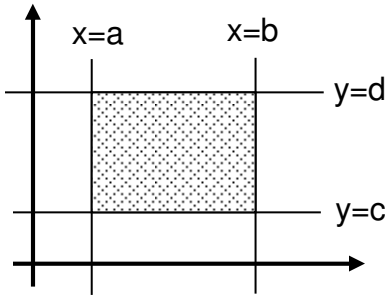
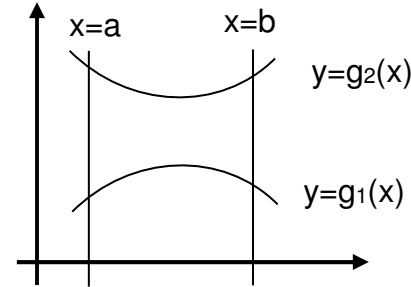
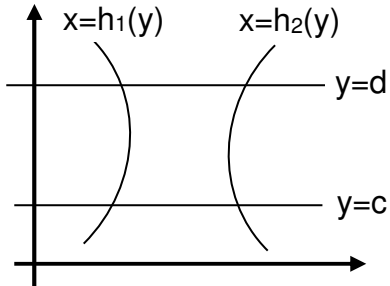
$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$$

$$R: (e^{16} - 1)/4$$



### Integrales Dobles en Coordenadas Cartesianas

<p>Región Rectangular</p>		$\left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$	$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$
<p>Región Tipo 1</p>		$\left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right\}$	$\int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy dx$
<p>Región Tipo 2</p>		$\left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$	$\int_c^d \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y) dx dy$

## Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

### Tarea No 20 : Integrales Dobles en Regiones Generales

(Sección 15.2 del Stewart 8ª Edición)

En los problemas 1 al 2 evalúe la integral doble:

$$P1: \iint_D x^3 y^2 dA \quad ; \quad D = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq x \end{array} \right. \right\}$$

$$R1: \frac{256}{21}$$

$$P2: \iint_D e^{x/y} dA \quad ; \quad D = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 1 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \leq y^3 \end{array} \right. \right\}$$

$$R2: \frac{1}{2} e^4 - 2e$$

En los problemas 3 y 4 halle el volumen del sólido dado:

P3: Debajo del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y arriba de la región limitada por las parábolas  $y = x^2$  ;  $x = y^2$

$$R3: \frac{6}{35}$$

P4: Limitado por el cilindro  $x^2 + z^2 = 9$  y los planos  $x = 0$  ,  $y = 0$  ,  $z = 0$  ,  $x + 2y = 2$  en el primer octante

$$R4: \frac{1}{6} (11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{2}{3} \right)$$

P5: Trace la región de integración y cambie el orden de integración, para la integral doble:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 f(x, y) dx dy$$

$$R5: \int_0^2 \int_0^{2x} f(x, y) dy dx$$

P6: Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración:  $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$

$$R6: \frac{1}{4} \operatorname{sen}(81)$$