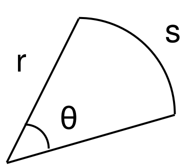
Unidad 5 : INTEGRALES MÚLTIPLES

Tema 5.4 : Integrales Dobles en Coordenadas Polares

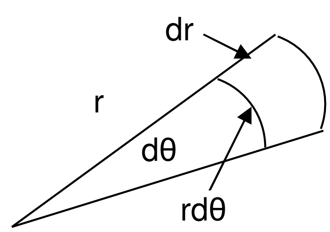
(Estudiar la Sección 15.3 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 21)

Cuando se va a calcular una integral doble en coordenadas polares, podemos considerar tres tipos diferentes de regiones: (a) Regiones de Rectángulos Polares, en las que los 4 límites son constantes, (b) Regiones Tipo I, en las que debe integrarse primero la variable r, y (c) Regiones Tipo 2, en las que debe integrarse primero la variable θ.
Ambas regiones se ilustran gráficamente, y simbólicamente, en la Tabla de la página 86. Esta tabla debe estudiarse detenidamente antes de proceder a resolver los ejercicios siguientes

Diferencial de área en coordenadas polares: Recordando la relación entre el radio y la longitud de arco en un sector circular está dada por: $s = r\theta$, tenemos entonces que el diferencial de área en coordenadas polares está dado por $dA = (dr)(rd\theta)$ como se muestra en la figura. Se acostumbra escribir como $dA = r\,dr\,d\theta$



s=rθ

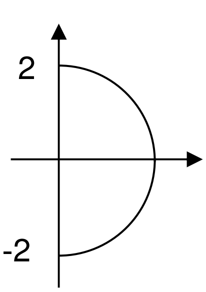


dA=(rdθ)(dr)

dA=rdrdθ

Ejemplo 1: Evalúe la integral $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, en donde D es la región limitada por el semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ y el eje y, pasando a coordenadas polares.

Solución:



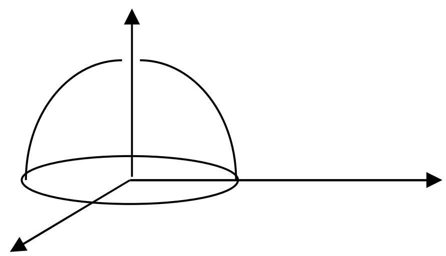
$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{-2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{-r^2}\right]_0^2 d\theta =$$

$$\frac{\left(1-e^{-4}\right)}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\left(1-e^{-4}\right)}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] = \frac{\left(1-e^{-4}\right)\pi}{2}$$

Ejemplo 2: Encuentre el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$, y el paraboloide $z=1-x^2-y^2$.

La curva de intersección de las superficies es:

$$z_1 = z_2$$
$$1-x^2-y^2=0$$
$$x^2+y^2=1$$
$$r^2=1$$
$$r=1$$



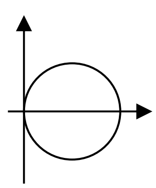
$$V=\iint_D \left(1-x^2-y^2\right)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r-r^3\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 3: Encuentre el volumen del sólido debajo del paraboloide $z=x^2+y^2$, arriba del plano xy, y dentro del cilindro $x^2+y^2=2x$

La base del volumen es:

$$x^2+y^2=2x$$
$$\left(x^2-2x+1\right)+y^2=1$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$
$$círculo\ C(1,0)\,;\ r=1$$



Su ecuación en c. polares:

$$x^2+y^2=2x$$
$$r^2=2r\cos\theta$$
$$r=2\cos\theta$$

$$V=\iint_D f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left(x^2+y^2\right)r\,dr\,d\theta$$

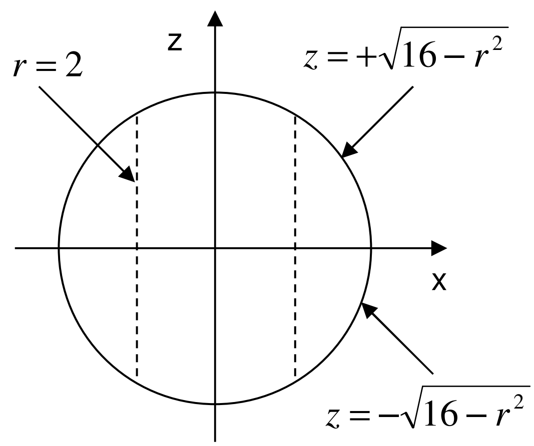
$$=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left(r^2\right)r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left(r^3\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16\cos^4\theta\,d\theta$$

$$=4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^2 d\theta=4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$=\ \cdots\ =\frac{3\pi}{2}$$

Ejemplo 4: Use coordenadas polares para calcular el volumen del sólido dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$



La esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 16$

$r^2 + z^2 = 16$

$z = \pm\sqrt{16 - r^2}$

El cilindro

$x^2 + y^2 = 4$

$r^2 = 4$

$r = 2$

$$V = \iiint dV = \iiint dz(rdrd\theta) = \int_0^{2\pi}\int_2^4\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{+\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_2^4 \left[2\sqrt{16 - r^2}\right]dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(16 - r^2\right)^{3/2}\right]_2^4 d\theta$$

$$V = \frac{2}{3}(12)^{3/2}(2\pi) = \frac{4\pi}{3}\left(24\sqrt{3}\right) = 32\pi\sqrt{3}$$

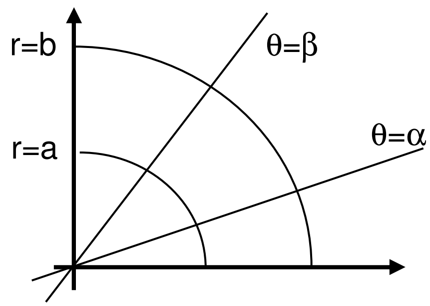
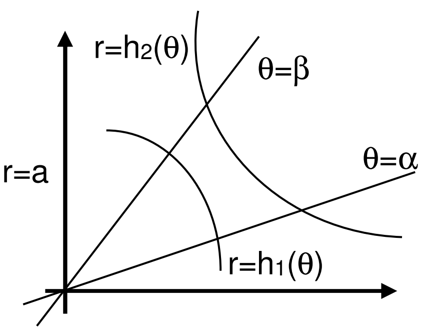
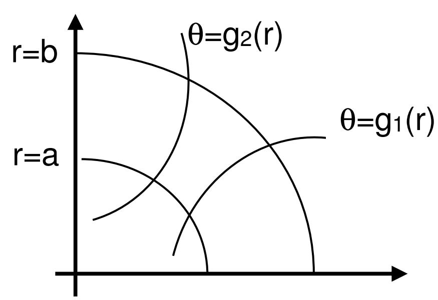
<u>Para la próxima clase estudiar las secciones</u>

15.3 Integrales Dobles en Coordenadas Polares

15.6 Integrales Triples en Coordenadas Cartesianas

<u>Tarea para entregar la próxima clase</u>

Tarea No. 21 Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Integrales Dobles en Coordenadas Polares			
Región Rectangular Polar		$\left\{ (r,\theta) \,\middle\|\, \begin{array}{c} a \le r \le b \\ \alpha \le \theta \le \beta \end{array} \right\}$	$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=a}^{r=b} f(r,\theta)\, r dr d\theta$ $\int_{r=a}^{r=b}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} f(r,\theta)\, r d\theta dr$
Región Tipo 1		$\left\{ (r,\theta) \,\middle\|\, \begin{array}{c} h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta) \\ \alpha \le \theta \le \beta \end{array} \right\}$	$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} f(r,\theta)\, r dr d\theta$
Región Tipo 2		$\left\{ (r,\theta) \,\middle\|\, \begin{array}{c} g_1(r) \le \theta \le g_2(r) \\ a \le r \le b \end{array} \right\}$	$\int_{r=a}^{r=b}\int_{\theta=g_1(r)}^{\theta=g_2(r)} f(r,\theta)\, r d\theta dr$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No 21 : Integrales Dobles en Coordenadas Polares** (Sección 15.3 del Stewart 8ª Edición)	
En los problemas 1 al 2 evalúe la integral doble pasando a coordenadas polares:	
$P1: \quad \iint_R xy\, dA$ en donde ***R*** es la región del primer cuadrante que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 4 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 25$	$R1: \quad \frac{609}{8}$
$P2: \quad \iint_R \left(x^2 + y^2\right) dA$ en donde ***R*** es la región limitada por las espirales: $r = \theta \quad ; \quad r = 2\theta \quad ; \quad para \quad 0 \le \theta \le 2\pi$	$R2: \quad 24\pi^5$
En los problemas 3 y 4 utilice coordenadas polares para hallar el volumen del sólido dado:	
P3: Debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \le 9$	$R3: \quad \frac{81\pi}{2}$
P4: Arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$R4: \quad \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
En los problemas 5 y 6 evalúe la integral iterada pasando a coordenadas polares:	
$P5: \quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx$	$R5: \quad \frac{\pi}{4}(e-1)$
$P6: \quad \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y^2\, dxdy$	$R6: \quad \frac{4\pi}{3}$