

Unidad 5 : INTEGRALES MÚLTIPLES

Tema 5.5 : Integrales Triples en Coordenadas Cartesianas

(Estudiar la Sección 15.6 en el Stewart 8ª Edición,; Hacer la Tarea No. 22)

Definición de Integral Triple en una caja rectangular:

$$\begin{aligned} \iiint f(x, y, z) dV &= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V \end{aligned}$$

Integrales Triples en Regiones Generales:

En la Tabla de la página 91 se muestran las seis diferentes regiones generales que tomaremos en consideración, para el cálculo de integrales triples. Cada una de estas regiones corresponde a uno de los seis diferentes ordenes posibles en que pueden integrarse las variables x , y y z .

Ejemplo 1:

Evalúe la integral triple $\iiint_E z dV$, en donde la región E es el tetraedro sólido limitado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ utilizando el orden de integración : $dz dy dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \int_{z=0}^{z=1-x-y} z dz dy dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \frac{1}{2} (1-x-y)^2 dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{-(1-x-y)^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{-1}{6} \int_0^1 \left\{ \underbrace{1-x-(1-x)}_{=0}^3 - (1-x)^3 \right\} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x) dx = \frac{-1}{6} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{24} [0 - 1] = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Evalúe la integral triple $\iiint_E z \, dV$, en donde la región E es el tetraedro sólido

limitado por los cuatro planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$; utilizando un orden de integración diferente al ejemplo anterior

Solución:

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dV &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=1-x} \int_{y=0}^{y=1-x-z} z \, dy \, dz \, dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=1-x} [zy]_0^{1-x-z} \, dz \, dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=1-x} [z - xz - z^2] \, dz \, dx = \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} - x \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^{1-x} \, dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] \, dx = \\ &= \left[\frac{-1(1-x)^3}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) + \frac{1(1-x)^4}{3 \cdot 4} \right]_0^1 = \\ &= \left[0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + 0 \right] - \left[\frac{-1}{6} - 0 + \frac{1}{12} \right] = \frac{-1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Cambiar el orden de integración a $dy \, dx \, dz$ para la integral:

$$\int_0^6 \int_0^{4-\frac{2x}{3}} \int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Solución: Se nos da como dato que la variable z varía desde $z = 0$ hasta

$z = 3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}$. Esta última ecuación la podemos describir como la ecuación del plano: $2x + 3y + 4z = 12$: La traza de este plano con el plano $z = 0$ tiene la

ecuación $2x + 3y = 12$. O sea $y = 4 - \frac{2x}{3}$, que define el valor máximo de y. Por lo

tanto ahora la y variará desde $y = 0$ hasta la y del plano $y = 4 - \frac{2x}{3} - \frac{4z}{3}$, y la

traza de este plano es $2x + 4z = 12$: $\int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{4-\frac{2x}{3}-\frac{4z}{3}} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$

Ejemplo 4: Utilice una integral triple para hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$; $z = 18 - x^2 - y^2$.

Solución: La curva de intersección de los dos paraboloides obtenida igualando $z_1 = z_2$, es el círculo $x^2 + y^2 = 9$. El volumen del sólido está dado por :

$$V = \iiint_E dV = \int_{-3}^{+3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} dz dy dx = 2 \int_{-3}^{+3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} [9 - x^2 - y^2] dy dx$$

y conviene simplificar esta integral doble integrando en coordenadas polares:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 [9 - r^2] r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 d\theta = 2 \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = 2 \left(\frac{81}{4} \right) (2\pi) = 81\pi$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

15.6 Integrales Triples en Coordenadas Cartesianas

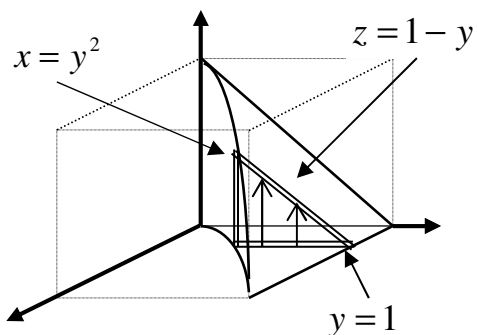
15.7 y 15.8 Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 22 Integrales Triples en Coordenadas Cartesianas

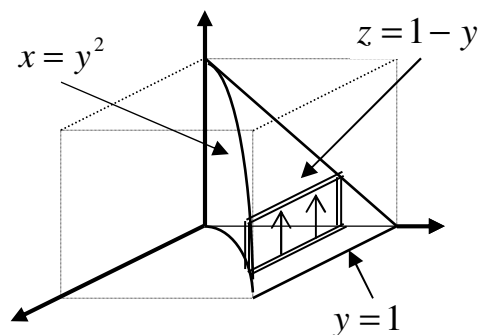
Ejemplo: Cambiar el orden de integración en la integral triple dada, sobre la región mostrada:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$



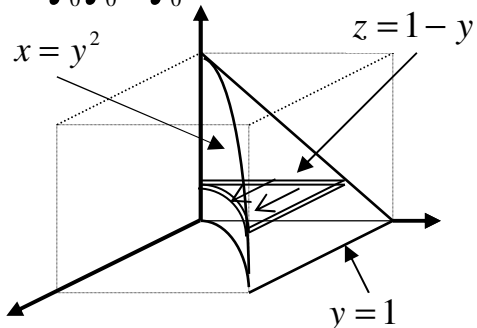
Con el orden: $dz dx dy$ tenemos.

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dx dy$$



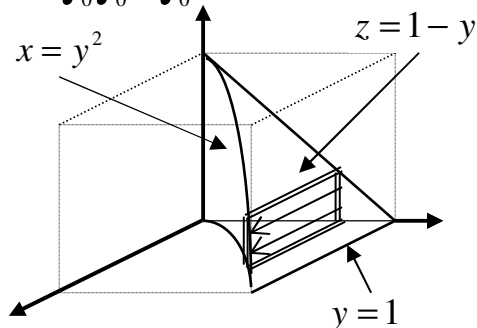
Con el orden: $dx dy dz$ tenemos.

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dy dz$$



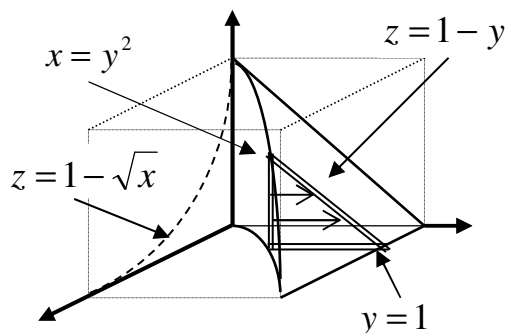
Con el orden: $dx dz dy$ tenemos.

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dz dy$$



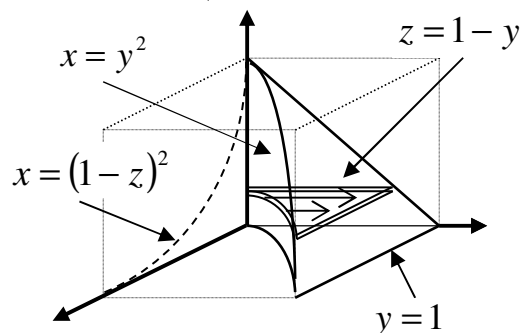
Con el orden: $dy dz dx$ tenemos.

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dz dx$$



Con el orden: $dy dx dz$ tenemos.

$$\int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dx dz$$



Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III
Tarea No 22 : Integrales Triples en Coordenadas Cartesianas

(Sección 15.6 del Stewart 8ª Edición)

En los problemas 1 al 4 evalúe la integral triple:

<p>P1: $\iiint_E 6xy \, dV$ en donde E está bajo el plano $z = 1 + x + y$, y arriba de la región del plano xy limitado por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$</p>	<p>R1: $\frac{65}{28}$</p>
<p>P2: $\iiint_E xy \, dV$ en donde E es el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$</p>	<p>R2: $\frac{1}{10}$</p>
<p>P3: $\iiint_E z \, dV$, en donde E está limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$, $x + z = 1$</p>	<p>R3: $\frac{1}{12}$</p>
<p>P4: $\iiint_E z \, dV$, en donde E está limitado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = 4$</p>	<p>R4: $\frac{16\pi}{3}$</p>
<p>En los problemas 5 y 6 utilice una integral triple para hallar el volumen del sólido dado:</p>	
<p>P5: El tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano $2x + 3y + 6z = 12$</p>	<p>R5: 8</p>
<p>P6: El sólido limitado por el cilindro $x = y^2$ y los planos $z = 0$, $x + z = 1$</p>	<p>R6: $\frac{8}{15}$</p>

DIFERENTES REGIONES DE INTEGRACIÓN PARA INTEGRALES TRIPLES.

REGIÓN SÓLIDA TIPO I	Región Plana Tipo I	$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y) \end{array} \right\}$		$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$
	Región Plana Tipo II	$\left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y) \end{array} \right\}$		$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy$
REGIÓN SÓLIDA TIPO II	Región Plana Tipo I	$\left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ g_1(y) \leq z \leq g_2(y) \\ \phi_1(y,z) \leq x \leq \phi_2(y,z) \end{array} \right\}$		$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x,y,z) dx dz dy$
	Región Plana Tipo II	$\left\{ \begin{array}{l} e \leq z \leq f \\ h_1(z) \leq y \leq h_2(z) \\ \phi_1(y,z) \leq x \leq \phi_2(y,z) \end{array} \right\}$		$\int_e^f \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x,y,z) dx dy dz$
REGIÓN SÓLIDA TIPO III	Región Plana Tipo I	$\left\{ \begin{array}{l} e \leq z \leq f \\ g_1(z) \leq x \leq g_2(z) \\ \phi_1(x,z) \leq y \leq \phi_2(x,z) \end{array} \right\}$		$\int_e^f \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \int_{\phi_1(x,z)}^{\phi_2(x,z)} f(x,y,z) dy dx dz$
	Región Plana Tipo II	$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ h_1(x) \leq z \leq h_2(x) \\ \phi_1(x,z) \leq y \leq \phi_2(x,z) \end{array} \right\}$		$\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{\phi_1(x,z)}^{\phi_2(x,z)} f(x,y,z) dy dz dx$