Unidad 5 : INTEGRALES MÚLTIPLES

Tema 5.6 : Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

(Estudiar la Sección 15.8 en el Stewart 5ª Edición; Hacer la Tarea No. 23)

Ejemplo 1 en Coordenadas Cilíndricas:

Evalúe la integral triple: $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, en donde E es el volumen dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, debajo del plano $z=4$, y arriba del paraboloide $z=1-x^2-y^2$

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 r\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 r^2\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^2 z\right]_{1-r^2}^4 dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\left[4-\left(1-r^2\right)\right]dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3r^2+r^4\right)dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r^3+\frac{r^5}{5}\right]_0^1 d\theta = \left(1+\frac{1}{5}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{6}{5}\cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5}$$

Ejemplo 2 en Coordenadas Cilíndricas: Evalúe la integral

$\int_{-2}^{+2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \left(x^2+y^2\right)dz\,dy\,dx$ cambiando a coordenadas cilíndricas,

Solución:

La curva de intersección del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, y el plano $z=2$, es el círculo de $x^2+y^2=4$, que limita la región de integración:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^3\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[r^3 z\right]_r^2 dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(2r^3-r^4\right)dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{2}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(8-\frac{32}{5}\right)d\theta =$$

$$= \frac{8}{5}\cdot 2\pi = \frac{16\pi}{5}$$

Ejemplo 3 en coordenadas esféricas: Evalúe la integral $\iiint_E e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dV$, en donde $E=\{(x,y,z)\,|\; x^2+y^2+z^2=1\}$

Solución:

$$\iiint_E e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\;\rho^2 sen\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[e^{\rho^3}\right]_0^1 sen\varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(e-1)\,sen\varphi\, d\theta\, d\varphi=\frac{e-1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}sen\varphi\, d\theta\, d\varphi=\frac{e-1}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\, d\theta$$

$$=\frac{2(e-1)}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2(e-1)}{3}\cdot 2\pi=\frac{4\pi}{3}(e-1)$$

Ejemplo 4 en coordenadas esféricas: Encuentre el volumen del sólido sobre el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=z$

Solución:

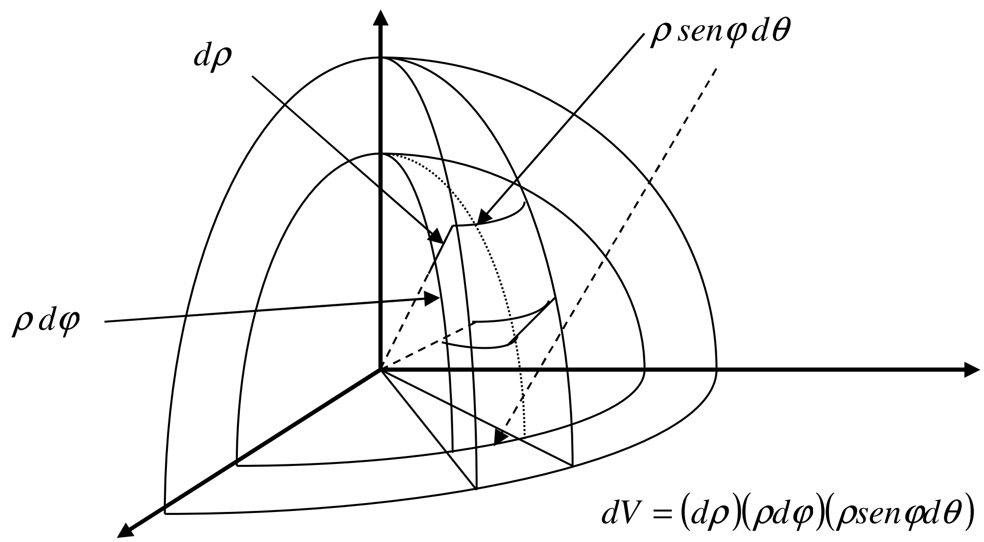
Completando el cuadrado la ecuación de la esfera es: $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ y en coordenadas esféricas es: $\rho^2=\rho\cos\varphi$, o simplificada: $\rho=\cos\varphi$. Entonces:

$$V=\iiint dV=\iiint \rho^2 sen\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\phi=\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\varphi}\rho^2 sen\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$=\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\varphi} sen\varphi\, d\theta\, d\phi=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\; sen\varphi\, d\theta\, d\phi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4}d\theta=\frac{-1}{12}\left[\cos^4(\pi/4)-\cos 0\right]\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{-1}{12}\left(\frac{1}{4}-1\right)2\pi=\frac{\pi}{8}$$

Diferencial de volumen en coordenadas esféricas:



$$dV = (d\rho)(\rho d\varphi)(\rho sen\varphi d\theta)$$
$$dV = \rho^2 sen\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

15.8 Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas
16.1 Campos Vectoriales

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 23 Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

Ma-817 : MATEMÁTICAS III PARA INGENIERIA

Tarea No 23 : Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

(Sección 15.8 del Stewart 5ª Edición)

En los problemas 1 y 2 evalúe la integral triple en coordenadas cilíndricas:

P1: Evalúe $\iiint_E y\, dV$ en donde ***E*** es el sólido que está entre los cilindros $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, arriba del plano xy, y abajo del plano $z=y+2$	$R1:\ \dfrac{15\pi}{4}$
P2: Evalúe $\iiint_E x^2\, dV$ en donde ***E*** es el sólido que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, arriba del plano $z=0$, y abajo del cono $z^2=4x^2+4y^2$	$R2:\ \dfrac{2\pi}{5}$

En los problemas 3 y 4 evalúe la integral triple en coordenadas esféricas:

P3: Evalúe $\iiint_E z\, dV$, donde E está entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ en el primer octante.	$R3:\ \dfrac{15\pi}{16}$
P4: Calcule el volumen del sólido que está sobre el cono $\phi=\pi/3$ y debajo de la esfera $\rho=4\cos\phi$	$R4:\ 10\pi$
P5: Transforme a coordenadas cilíndricas y evalúe la integral: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$	$R5:\ \dfrac{8\pi}{35}$
P6: Transforme a coordenadas esféricas y evalúe la integral: $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$	$R6:\ \dfrac{243\pi}{5}$