Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

Tema 6.2 : Integrales de Línea

(Estudiar la Sección 16.2 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 24)

Definición de Integral de Línea: Si f es una función definida sobre una curva C, con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$; $y = g(t)$, $a \le t \le b$, entonces la integral de línea de f a lo largo de C se define como:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \underbrace{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta s_i$$

Ejemplo 1: Evalúe la integral de línea $\int_C \left(2 + x^2 y\right)ds$, en donde C es la mitad superior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$

Solución: Las ecuaciones paramétricas del círculo son:
$x = \cos t$; $y = sent$; $0 \le t \le \pi$

El diferencial de arco entonces es:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,dt$$

$$ds = \sqrt{(-sent)^2 + (\cos t)^2}\,dt$$

$$\therefore \quad ds = dt$$

por lo tanto:

$$\int_C \left(2 + x^2 y\right)ds = \int_0^{\pi} \left[2 + \cos^2 t\ sent\right]dt$$

$$= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = \left(2\pi + \frac{1}{3}\right) - \left(0 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\pi + \frac{2}{3}$$

Ecuación de un segmento de recta:

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P_0 en dirección del vector v , que estudiamos en el Tema 1.5 es:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Si tomamos el vector v como el vector del punto P_0 al punto P_1 tenemos: $\vec{v} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, y entonces:

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1$$

$$0 \le t \le 1$$

representa el segmento de recta del punto P_0 al punto P_1, y las correspondientes ecuaciones paramétricas son:

$$x = (1-t)x_0 + tx_1$$
$$y = (1-t)y_0 + ty_1$$

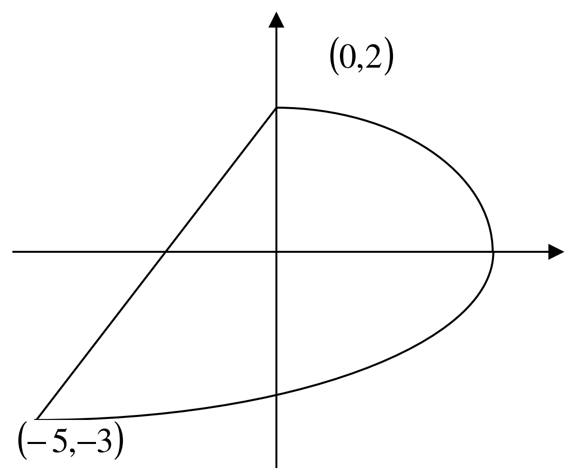
Ejemplo 2: Evalúe la integral de línea $\int_C y^2dx + xdy$, en donde (a) C=C_1 es el segmento de recta de $(-5,-3)$ a $(0,2)$, y (b) C=C_2 es el arco de parábola $x = 4 - y^2$, desde $(-5,-3)$ a $(0,2)$.

Solución: (a) las ecuaciones paramétricas del segmento de recta son:

$$x = (1-t)(-5) + t(0)$$
$$y = (1-t)(-3) + t(2)$$
$$x = 5t - 5$$
$$y = 5t - 3$$
$$0 \le t \le 1$$

y (b) las del arco de parábola son:

$$y = t$$
$$x = 4 - t^2$$
$$-3 \le t \le 2$$



Solución: (a)

$$\int_C y^2dx + xdy = \int_0^1 (5t-3)^2(5dt) + (5t-5)(5dt) = \left[\frac{(5t-3)^3}{3} + \frac{(5t-5)^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$\left[\frac{8}{3} + 0\right] - \left[\frac{-27}{3} + \frac{25}{2}\right] = \frac{35}{3} - \frac{25}{2} = \frac{70-75}{6} = \frac{-5}{6}$$

Solución: (b)

$$\int_C y^2dx + xdy = \int_{-3}^2 (t^2)(-2tdt) + (4-t^2)(dt) = \int_{-3}^2 (4 - 2t^3 - t^2)dt =$$

$$\left[4t - \frac{2t^4}{4} - \frac{t^3}{3}\right]_{-3}^2 = \left[8 - 8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-12 - \frac{81}{2} + 9\right] = -\frac{8}{3} + 3 + \frac{81}{2} = \frac{-16+18+243}{6} = \frac{245}{6}$$

Ejemplo 3: Encuentre el trabajo hecho por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y)=x^2\hat{\imath}-xy\hat{\jmath}$, al mover una partícula por la trayectoria $\vec{r}(t)=\cos t\hat{\imath}+sent\hat{\jmath}$; $0\le t\le \pi/2$

Solución:

$$W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\hat{r}=\int\left\langle x^2,-xy\right\rangle \bullet \left\langle dx,dy\right\rangle=\int_C x^2dx-xydy=$$

$$\int_0^{\pi/2}(\cos t)^2(-sent\ dt)-(\cos t)(sent)(\cos t\ dt)=\int_0^{\pi/2}-2\cos^2 t\ sent\ dt$$

$$=\left[2\frac{(\cos t)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}(0-1)=\frac{-2}{3}$$

Ejemplo 4: Evalúe $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, si $\vec{F}(x,y,z)=xy\hat{\imath}+yz\hat{\jmath}+zx\hat{k}$, y

$C:\quad x=t\ ;\ y=t^2\ ;\ z=t^3\ ;0\le t\le 1$

Solución:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C\left\langle xy,yz,xz\right\rangle \bullet \left\langle dx,dy,dz\right\rangle=\int_C xydx+yzdy+zxdz=$$

$$\int_0^1 (t)(t^2)(dt)+(t^2)(t^3)(2tdt)+(t^3)(t)(3t^2dt)=\int_0^1\left(t^3+2t^6+3t^6\right)dt=$$

$$\int_0^1\left(t^3+5t^6\right)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{5t^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{5}{7}=\frac{7+20}{28}=\frac{27}{28}$$

RESUMEN: La Integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de la curva C es:

$$W=Trabajo=\int_C \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\bullet\vec{r}'\,dt=\int_C \vec{F}\bullet\hat{T}\,ds=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$C=Circulación=\int_C \vec{v}\bullet d\vec{r}$ para un campo vectorial de velocidades de fluido.

Para la próxima clase estudiar las secciones

16.2 Integrales de Línea

16.3 Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 24 Integrales de Línea

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 24 : Integrales de Línea

(Sección 16.2 del Stewart 8ª Edición)

En los problemas 1 al 3 evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada:

P1: Evalúe $\int_C (xy + \ln x)\,dy$, en donde ***C*** es el arco de la parábola $y = x^2$ desde (1,1) hasta (3,9).	$R1: \quad \frac{464}{5} + 9\ln 3$
P2: Evalúe $\int_C xy^3\,ds$ en donde ***C*** es la curva con ecuaciones paramétricas $x = 4sent$, $y = 4\cos t$, $z = 3t$, $0 \le t \le \pi/2$	$R2: \quad 320$
P3: Evalúe $\int_C xe^{yz}\,ds$ en donde ***C*** es el segmento de recta de (0,0,0) hasta (1,2,3)	$R3: \quad \frac{\sqrt{14}}{12}\left(e^6 - 1\right)$

En los problemas 4 al 6 evalúe la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, en donde C está dada por la función vectorial $\vec{r}(t)$

P4: $\vec{F}(x,y) = x^2y^3\hat{i} - y\sqrt{x}\,\hat{j}$, $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} - t^3\hat{j}$ $0 \le t \le 1$	$R4: \quad -\frac{59}{105}$
P5: $\vec{F}(x,y,z) = senx\hat{i} + \cos y\hat{j} + xz\hat{k}$ $\vec{r}(t) = t^3\hat{i} - t^2\hat{j} + t\hat{k}$ $0 \le t \le 1$	$R5: \quad \frac{6}{5} - \cos 1 - sen 1$
P6: $\vec{F}(x,y) = e^{x-1}\hat{i} + xy\hat{j}$, $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + t^3\hat{j}$ $0 \le t \le 1$	$R6: \quad \frac{11}{8} - \frac{1}{e}$