

## Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

### Tema 6.3 : Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

(Estudiar la Sección 16.3 en el Stewart 8ª Edición; Hacer la Tarea No. 25)

#### Repaso del Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{siempre que } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) = F'(x)$$

#### Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = [f(x, y, z)]_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

#### Demostración del Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} &= \int_C \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = \\ &= \int_C \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} df = [f(x, y, z)]_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = \\ &= f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

#### Independencia de la Trayectoria

Una consecuencia inmediata del Teorema Fundamental de las Integrales de Línea es que el trabajo realizado para mover una partícula dentro de un campo vectorial conservativo  $\vec{F}(x, y, z)$ , tal que  $\nabla f = \vec{F}$ , desde un punto inicial  $(x_1, y_1, z_1)$  hasta un punto final  $(x_2, y_2, z_2)$  es independiente de la trayectoria, ya que el resultado solo depende de la diferencia de potencial  $f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$ , y no depende de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Esto es:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

**Campos conservativos y trayectorias cerradas:**

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \oint_C df = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$\text{en resumen entonces: } W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

**Criterio para que un campo bidimensional sea conservativo:**

Un campo vectorial bidimensional es conservativo si:

$$\nabla f = F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}} \quad \text{criterio}$$

y además tenemos que:

$$\underline{\underline{f(x, y) = \int P(x, y)dx + h(y) \quad ; \quad f(x, y) = \int Q(x, y)dy + g(x) \quad \text{potencial}}}$$

Ver la generalización a campos tridimensionales en la Tabla de la página 107

**EJEMPLO 1:** Determine si el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = (x - y)\hat{i} + (x - 2)\hat{j}$  es o no es conservativo.

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x - y)}{\partial y} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x - 2)}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{no es conservativo}$$

**EJEMPLO 2:** Determine si el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\hat{i} + (x^2 - 3y^2)\hat{j}$  es o no es conservativo.

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(3 + 2xy)}{\partial y} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - 3y^2)}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{si es conservativo}$$

**EJEMPLO 3:** (a) Si  $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\hat{i} + (x^2 - 3y^2)\hat{j}$ , encuentre la función de potencial  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ . (b) Evalúe la integral de línea  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , donde  $C$  es la curva dada por  $\vec{r}(t) = e^t \text{sen } t \hat{i} + e^t \text{cos } t \hat{j}$ ;  $0 \leq t \leq \pi$

Solución:

$$f(x, y) = \int P(x, y) dx = \int (3 + 2xy) dx = 3x + x^2 y + h(y)$$

$$f(x, y) = \int Q(x, y) dy = \int (x^2 - 3y^2) dy = x^2 y - y^3 + g(x)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 3x + x^2 y - y^3 + K$$

$$\text{además } \vec{r}(0) = \langle 0, 1 \rangle ; \quad \vec{r}(\pi) = \langle 0, -e^\pi \rangle$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x, y)]_a^b = [3x + x^2 y - y^3 + K]_{(0,1)}^{(0, -e^\pi)}$$

$$= [0 + 0 + e^{3\pi} + K] - [0 + 0 - 1 + K] = 1 + e^{3\pi}$$

**EJEMPLO 4:** Encuentre la función de potencial  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ , para el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \hat{i} + (2xy + e^{3z}) \hat{j} + 3ye^{3z} \hat{k}$

Solución:

$$f(x, y, z) = \int P dx = \int y^2 dx = xy^2 + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int Q dy = \int (2xy + e^{3z}) dy = xy^2 + ye^{3z} + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int R dz = \int 3ye^{3z} dz = ye^{3z} + p(x, y)$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

$$\text{comprobación } \nabla f = \vec{F}$$

$$\nabla(xy^2 + ye^{3z} + K) = y^2 \hat{i} + (2xy + e^{3z}) \hat{j} + 3ye^{3z} \hat{k} = \vec{F}(x, y, z)$$

**Para la próxima clase estudiar las secciones**

16.3 Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

16.4 Teorema de Green

**Tarea para entregar la próxima clase**

Tarea No. 25 Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

## Campos Vectoriales e Integrales de Línea

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

*es un campo vectorial conservativo*

$$\begin{array}{ccc} & \Updownarrow & \\ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial f}{\partial z} = R \end{array} \\ & \Downarrow & \end{array}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$$

$$\int_a^b \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \int_a^b P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = f(b) - f(a)$$

$$\oint_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

### Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

#### Tarea No 25 : Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

(Sección 16.3 del Stewart 8ª Edición)

En los problemas 1 al 2 determine si  $\mathbf{F}$  es o no un campo vectorial conservativo. Si lo es, encuentre una función  $f$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$

**P1:**  $\vec{F}(x, y) = xe^y \hat{i} + ye^x \hat{j}$

R1: *No conservativo*

**P2:**  $\vec{F}(x, y) = (ye^x + \text{sen}y) \hat{i} + (e^x + x \cos y) \hat{j}$

R2:  $f(x, y) = ye^x + x \text{sen}y + K$

(a) Encuentre una función  $f$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ , y (b) utilice ese resultado para evaluar

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  a lo largo de la curva  $C$ .

**P3:**  $\vec{F}(x, y) = x^3 y^4 \hat{i} + x^4 y^3 \hat{j}$   
 $C: \vec{r}(t) = \sqrt{t} \hat{i} + (1+t^3) \hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

R3: (a)  $f(x, y) = \frac{1}{4} x^4 y^4 + K$   
 (b) 4

**P4:**  $\vec{F}(x, y, z) = y \hat{i} + (x+z) \hat{j} + y \hat{k}$ ,  $C$ : es el segmento de recta de  $(2,1,4)$  a  $(8,3,-1)$

R4: (a)  $f(x, y, z) = xy + yz + K$   
 (b) 15

**P5:**  $\vec{F}(x, y, z) = (2xz + \text{sen}y) \hat{i} + x \cos y \hat{j} + x^2 \hat{k}$   
 $C: \vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \text{sen} t \hat{j} + t \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

R5:  
 (a)  $f(x, y, z) = x^2 z + x \text{sen}y + K$   
 (b)  $2\pi$

Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral

**P6:**  $\int_C 2x \text{sen}y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$   
 $C$ : es cualquier trayectoria de  $(-1,0)$  a  $(5,1)$

R6:  $25 \text{sen}(1) - 1$