

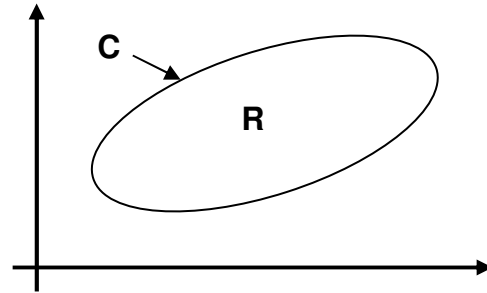
Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

Tema 6.4 : Teorema de Green

(Estudiar la Sección 16.4 en el Stewart 8ª Edición,; Hacer la Tarea No. 26)

Teorema de Green: Sea C una curva cerrada simple, orientada positivamente, y sea R la región limitada por C , entonces:

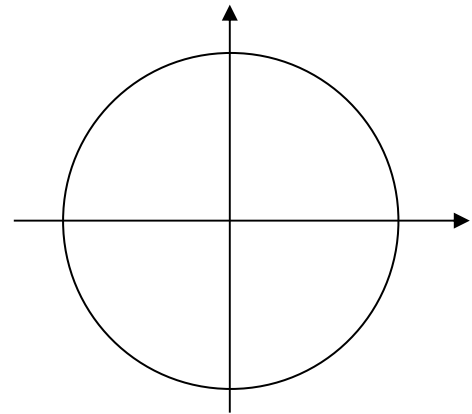
$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



EJEMPLO 1: Evalúe la integral de línea $\int_C (3y - e^{\text{sen}x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy$ a lo largo de la curva $C: x^2 + y^2 = 9$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_C \underbrace{(3y - e^{\text{sen}x})}_P dx + \underbrace{(7x + \sqrt{y^4 + 1})}_Q dy &= \\ \iint_R (7 - 3) dA &= 4 \iint_R dA = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^3 d\theta = \frac{36}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 18[\theta]_0^{2\pi} = 36\pi \end{aligned}$$

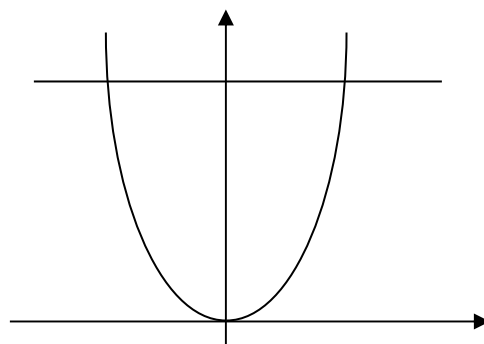


EJEMPLO 2:

Evalúe la integral

$$\int_C (y^2 - \tan^{-1} x)dx + (3x + \text{sen}y)dy,$$

en donde C es la frontera de la región limitada por la parábola $y = x^2$, y la recta $y = 4$



$$\int_C (y^2 - \tan^{-1} x) dx + (3x + \operatorname{sen} y) dy = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (3 - 2y) dy dx =$$

$$= \int_{-2}^2 \left[3y - y^2 \right]_{x^2}^4 dx = \int_{-2}^2 [(12 - 16) - (3x^2 - x^4)] dx =$$

Solución:

$$= \left[-4x - x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \left[-8 - 8 + \frac{32}{5} \right] - \left[8 + 8 - \frac{32}{5} \right] =$$

$$= -32 + \frac{64}{5} = \frac{-160 + 64}{5} = \frac{-96}{5}$$

EJEMPLO 3: Use el teorema de Green para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Solución: $\vec{F} = \langle y \cos x - xy \sin x, xy + x \cos x \rangle$, y C es el triángulo de

$$(0,0) a (0,4) a (2,0) a (0,0) \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_R [(y - x \sin x + \cos x) - (\cos x - x \sin x)] dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} y dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4-2x)^2 dx = \frac{-1}{4} \left[\frac{(4-2x)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

EJEMPLO 4: Use el teorema de Green para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Solución: $\vec{F} = \langle x^2 + xy, xy^2 \rangle$, y C es el triángulo de $(0,0) a (1,0) a (0,1) a (0,0)$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R (y^2 - x) dy dx$$

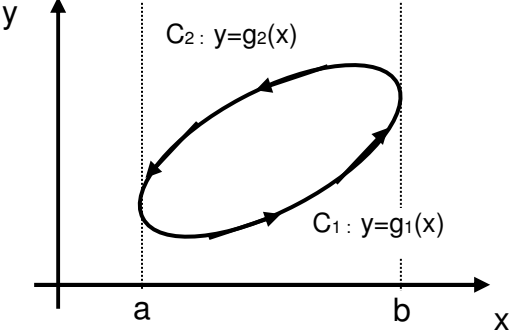
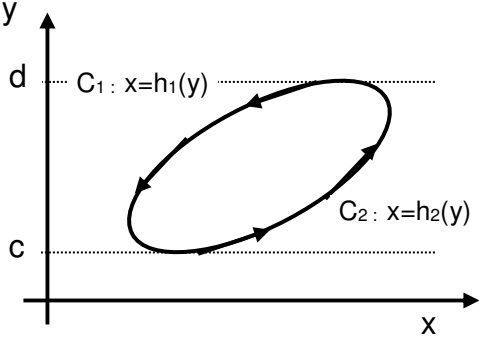
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y^2 - x) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} - xy \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^3}{3} - x + x^2 \right] dx = \frac{-1}{12}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

16.4 Teorema de Green

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 26 Teorema de Green

<p>Demostración del Teorema de Green</p>	$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA$
$\oint_C Pdx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dA$	$\oint_C Qdy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA$
	
$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [P(x, y)]_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b P(x, g_2(x)) dx - \int_a^b P(x, g_1(x)) dx \\ &= - \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_b^a P(x, g_2(x)) dx \\ &= - \left[\int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx \right] \\ &= - \left[\int_{C_1} Pdx + \int_{C_2} Pdx \right] = - \oint_C P dx \end{aligned}$	$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\ &= \int_c^d [Q(x, y)]_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} dy \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y) dy - \int_c^d Q(h_1(y), y) dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y) dy + \int_d^c Q(h_1(y), y) dy \\ &= + \left[\int_d^c Q(h_1(y), y) dy + \int_c^d Q(h_2(y), y) dy \right] \\ &= + \left[\int_{C_1} Qdy + \int_{C_2} Qdy \right] = \oint_C Q dy \end{aligned}$

Ma-817 : Matemáticas III para Ingeniería		
Unidad 5: Campos Vectoriales e Integrales de Línea		
	Trayectorias Abiertas	Trayectorias Cerradas
El Campo no es Conservativo	<p style="text-align: center;">Sección 16:2 Integrales de Línea</p> $\int_a^b \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_a^b Pdx + Qdy$ <p style="text-align: center;">La evaluación de la integral requiere de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria</p>	<p style="text-align: center;">Sección 16.4 Teorema de Green</p> $\oint \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \iint \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA$ <p style="text-align: center;">La evaluación de la integral requiere de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria</p>
El Campo si es Conservativo	<p style="text-align: center;">Sección 16:3 Teorema Fundamental de las Integrales de Línea</p> $\int_a^b \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_a^b df = f(b) - f(a)$ <p style="text-align: center;">El valor de la integral es independiente de la trayectoria</p>	$\oint \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = 0$

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 26 : Teorema de Green

(Sección 16.4 del Stewart 8ª Edición)

En los problemas 1 al 5 utilice el Teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, positivamente orientada.

<p>P1: Evalúe $\int_C e^y dx + 2xe^y dy$, en donde C es el cuadrado con lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$</p>	<p>$R1: e - 1$</p>
<p>P2 Evalúe $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$, en donde C es la frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$; $x = y^2$</p>	<p>$R2: \frac{1}{3}$</p>
<p>P3: Evalúe $\int_C y^3 dx - x^3 dy$ en donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$</p>	<p>$R3: -24\pi$</p>
<p>P4: : Evalúe $\int_C xy dx + 2x^2 dy$ en donde C está formada por el segmento de recta de $(-2,0)$ a $(2,0)$ y la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = 4$</p>	<p>$R4: 0$</p>
<p>P5: Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, en donde $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2 y)\hat{i} + xy^2 \hat{j}$, y C está formada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y los segmentos de recta de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(0,0)$ y de $(0,0)$ a $(2,0)$</p>	<p>$R5: \pi + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$</p>
<p>P6: Use el Teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x, y) = x(x + y)\hat{i} + xy^2 \hat{j}$ al mover una partícula desde el origen, a lo largo del eje x hasta $(1,0)$, luego a lo largo del segmento de recta hasta $(0,1)$, y finalmente de regreso al origen, a lo largo del eje y.</p>	<p>$R6: -\frac{1}{12}$</p>