

## Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

### Tema 6.5 : Rotacional y Divergencia

(Estudiar la Sección 16.5 en el Stewart 8ª Edición; Tarea No. 27)

Definición del Rotacional de un Campo Vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \langle P, Q, R \rangle = Pi + Qj + Rk$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) i - \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

**EJEMPLO 1.** calcular el rotacional de:  $\vec{F}(x, y, z) = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle = xzi + xyzj - y^2k$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = (-2y - xy)i - (0 - x)j + (yz - 0)k$$

$$\text{rot } \vec{F} = -(x+2)yi + xj + yzk = \langle -(x+2)y, x, yz \rangle$$

**EJEMPLO 2:** si  $\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$  demuestre que

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = i \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) - j \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + k \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = \langle 0, 0, 0 \rangle = \vec{0}$$

Recordando que un campo vectorial es conservativo si existe una función  $f$  cuyo gradiente sea igual al campo vectorial, o sea si  $\nabla f = \vec{F}$ , entonces del teorema anterior se deduce que un campo vectorial es conservativo sí, y solo si  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , o sea si su rotacional vale cero.

**EJEMPLO 3:** demuestre que el siguiente campo vectorial es conservativo.

$$\vec{F}(x, y, z) = y^2 z^3 i + 2xyz^3 j + 3xy^2 z^2 k$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix} = \\ &= (6xyz^2 - 6xyz^2) i - (3y^2 z^2 - 3y^2 z^2) j + (2yz^3 - 2yz^3) k = \langle 0, 0, 0 \rangle = \vec{0} \end{aligned}$$

Definición de la Divergencia de un Campo Vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \langle P, Q, R \rangle = Pi + Qj + Rk$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \circ \vec{F} = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ (Pi + Qj + Rk) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

**EJEMPLO 4:** calcular la Divergencia de  $\vec{F}(x, y, z) = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle = xzi + xyzj - y^2 k$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \circ \vec{F} = \left( \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} \right) = z + xz$$

$$\text{div } \vec{F} = z + xz$$

**EJEMPLO 5:** Demostrar que  $\text{div}(\text{rot } F) = 0$

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{F}) &= \nabla \circ \nabla \times \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Operador Laplaciano:  $\nabla^2 = \nabla \circ \nabla$

$$\text{Laplaciano de } f(x,y,z) \quad \nabla^2 f = \nabla \circ \nabla f = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{Ecuación de Laplace: } \nabla^2 f = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

### Formas vectoriales del Teorema de Green

$$W = \oint_C \vec{F} \circ d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad \text{y tomando el campo como:}$$

$$\vec{F}(x, y, 0) = P(x, y)i + Q(x, y)j \quad \text{entonces}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \quad \text{y por tanto } (\text{rot } \vec{F}) \circ k = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Y el Teorema de Green se puede escribir en la forma vectorial:

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_R (\text{rot } \vec{F}) \circ k dA$$

Esto nos da la integral de línea de la componente tangencial de F a lo largo de C, como la integral doble de la componente vertical del rotacional de F en la región D encerrada por C. Más adelante veremos que en tres dimensiones, este es el Teorema del Rotacional de Stokes.

Veamos ahora la integral de línea de la componente normal de F a lo largo de C:

La ecuación vectorial de la curva es:  $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j$

Y el vector tangente unitario es:  $\hat{T}(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{x'(t)}{|r'(t)|}i + \frac{y'(t)}{|r'(t)|}j$  y el vector normal

unitario es:  $\hat{n}(t) = \frac{y'(t)}{|r'(t)|}i - \frac{x'(t)}{|r'(t)|}j$  ya que T y n son normales:  $\hat{T}(t) \circ \hat{n}(t) = 0$  por lo

$$\text{tanto: } \oint_C \vec{F} \circ \vec{n} ds = \oint_C (\vec{F} \circ \vec{n}) |r'| dt = \oint_C \left[ \frac{Py'}{|r'|} - \frac{Qx'}{|r'|} \right] |r'| dt = \oint_C Py' dt - Qx' dt =$$

$$= \oint_C Pdy - Qdx = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \iint_D \operatorname{div} F dA \quad \text{y por lo tanto, finalmente:}$$

$$\oint_C \vec{F} \circ \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} F dA \quad \text{Esta ecuación indica que la integral de línea de la}$$

componente normal de F a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de F en la región D encerrada por C.

Más adelante veremos que en tres dimensiones este es el Teorema de la Divergencia de Gauss.

**Para la próxima clase estudiar la sección:**

16.5 Rotacional y Divergencia

**Tarea para la próxima clase:**

Tarea No. 27 Rotacional y Divergencia

## Ma-2009: MATEMÁTICAS PARA INGENIERÍA III

### Tarea No. 27: Rotacional y Divergencia

(Sección 16.5 del Stewart 8ª Edición)

<b>Ma-2009: MATEMÁTICAS PARA INGENIERÍA III</b> <b>Tarea No. 27: Rotacional y Divergencia</b> (Sección 16.5 del Stewart 8ª Edición)			
1	Determine (a) el rotacional y (b) la divergencia del campo vectorial. $\vec{F}(x,y,z) = xy^2z^2\hat{i} + x^2yz^2\hat{j} + x^2y^2z\hat{k}$		
2	Determine (a) el rotacional y (b) la divergencia del campo vectorial. $\vec{F}(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}}{1+z}\hat{i} + \frac{\sqrt{y}}{1+x}\hat{j} + \frac{\sqrt{z}}{1+y}\hat{k}$		
3	Determine si el campo vectorial es conservativo, y si lo es, determine su función de potencial $f$ tal que: $\vec{F}(x,y,z) = y^2z^3\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + 3xy^2z^2\hat{k}$		
4	Determine si el campo vectorial es conservativo, y si lo es, determine su función de potencial $f$ tal que $\vec{F} = \nabla f$ : $\vec{F}(x,y,z) = e^{yz}\hat{i} + xze^{yz}\hat{j} + xye^{yz}\hat{k}$		
5	Demuestre que todo campo vectorial de la forma: $\vec{F}(x,y,z) = f(x)\hat{i} + g(y)\hat{j} + h(z)\hat{k}$ , es irrotacional		
6	Demuestre la identidad: $div(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \circ rot \vec{F} - \vec{F} \circ rot \vec{G}$		
7	Sea $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ; $r =  \vec{r}  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Verifique cada identidad: <table style="width: 100%; border: none;"> <tbody> <tr> <td style="border: none; width: 50%; vertical-align: top;">           (a) <math>\nabla r = \vec{r}/r</math>            (b) <math>\nabla \times \vec{r} = 0</math> </td> <td style="border: none; width: 50%; vertical-align: top;">           (c) <math>\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3</math>            (d) <math>\nabla \ln r = \vec{r}/r^2</math> </td> </tr> </tbody> </table>	(a) $\nabla r = \vec{r}/r$ (b) $\nabla \times \vec{r} = 0$	(c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$ (d) $\nabla \ln r = \vec{r}/r^2$
(a) $\nabla r = \vec{r}/r$ (b) $\nabla \times \vec{r} = 0$	(c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$ (d) $\nabla \ln r = \vec{r}/r^2$		
<i>Respuestas</i>			
R1: (a) $\langle 0,0,0 \rangle$ ; (b) $y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2$ R2: (a) $-\frac{\sqrt{z}}{(1+y)^2}\hat{i} - \frac{\sqrt{x}}{(1+z)^2}\hat{j} - \frac{\sqrt{y}}{(1+x)^2}\hat{k}$			

$$\text{R2: (b) } \frac{1}{2\sqrt{x}(1+z)} + \frac{1}{2\sqrt{y}(1+x)} + \frac{1}{2\sqrt{z}(1+y)}$$

$$\text{R3: Si es conservativo y } f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

$$\text{R4: Si es conservativo y } f(x, y, z) = xe^{yz} + K$$

