Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

Tema 6.6 : Superficies Paramétricas

(Estudiar la Sección 16.6 en el Stewart 8ª Edición; Tarea No. 28)

Ecuaciones paramétricas de una **curva** en 3D:

$x = f(t);\ y = g(t);\ z = h(t)$

Ecuación vectorial de una **curva** en 3D:

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$

Ecuaciones paramétricas de una **superficie**:

$x = f(u,v);\ y = g(u,v);\ z = h(u,v)$

Ecuación vectorial de una **superficie**:

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k} = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle$

EJEMPLO 1: Identifique la superficie con ecuación vectorial:

$r(u,v) = 2\cos u\hat{i} + v\hat{j} + 2sen u\hat{k}$ las ecuaciones paramétricas de la superficie son: $x = 2\cos u$; $y = v$; $z = 2sen u$, de donde vemos que:

$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4sen^2 u = 4$ que representa un cilindro de radio 2 con su eje sobre el eje y.

Las familias de curvas $r(u_0, v)$ y $r(u, v_0)$ correspondientes a las rectas verticales y horizontales, en el "Plano u,v" se llaman "curvas reticulares" y son usadas por las computadoras para dibujar las superficies paramétricas.

EJEMPLO 2: Encuentre la función vectorial del plano que pasa por el punto P_0, con vector posición $\vec{r}_0$, y que contiene dos vectores no paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Si P es cualquier punto en el plano se puede expresar como $P_0P = u\vec{a} + v\vec{b}$, y si $\vec{r}$ es el vector posición de P, entonces: $\vec{r} = OP_0 + P_oP = \vec{r}_o + u\vec{a} + v\vec{b}$, y la ecuación vectorial del plano se pude expresar como: $\underline{r(u,v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}}$, y las ecuaciones paramétricas del plano como: $\underline{x = x_0 + ua_1 + vb_1;\quad y = y_0 + ua_2 + vb_2;\quad z = z_0 + ua_3 + vb_3}$

EJEMPLO 3: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la esfera: $x^2+y^2+z^2=a^2$

Utilizando las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, podemos usar como parámetros a: ρ,θ,ϕ y tenemos que:

$x=\rho sen\phi\cos\theta$; $y=\rho sen\phi sen\theta$; $z=\rho\cos\phi$ y como: $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$$\vec{r}(\phi,\theta)=asen\phi\cos\theta\vec{i}+asen\phi sen\theta\vec{j}+a\cos\phi\vec{k}$$

EJEMPLO 4: Encuentre una función vectorial que represente al paraboloide elíptico: $z=x^2+2y^2$. Tomando a "x" y "y" como parámetros las ecuaciones paramétricas son simplemente: $x=x$; $y=y$; $z=x^2+2y^2$ y la ecuación vectorial es: $\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+\left(x^2+2y^2\right)\vec{k}$

Parametrización general de una superficie de la forma: $z=f(x,y)$ tomando a "x" y a "y" y como parámetros: $x=x$; $y=y$; $z=f(x,y)$

EJEMPLO 5: Determine a) las ecuaciones paramétricas, y b) la ecuación vectorial de la superficie: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$

a) $x=x$; $y=y$; $z=2\sqrt{x^2+y^2}$

b) $\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+2\sqrt{x^2+y^2}\vec{k}$

PLANOS TANGENTES: Determinaremos ahora la ecuación del plano tangente a una superficie paramétrica con ecuación: $\vec{r}(u,y)v=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$

En el punto P_0 con vector posición $\vec{r}(u_0,v_0)$, si se mantiene constante a u poniendo $u=u_0$ obtenemos una curva C_1 sobre la superficie S: $\vec{r}(u_0,v)$. Y el vector tangente a C_1 en P_0 es: $\vec{r}_v=\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\hat{i}+\dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\hat{j}+\dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\hat{k}$

Y de igual forma manteniendo constante $v=v_0$ se obtiene la curva reticular C_2 dada por $\vec{r}(u,v_0)$, con vector tangente: $\vec{r}_u=\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\hat{i}+\dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\hat{j}+\dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\hat{k}$

Y entonces $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ será un vector normal al plano tangente.

EJEMPLO 6: Determine el plano tangente a la superficie con ecuaciones paramétricas: $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ en el punto $(1,1,3)$. Primero calculamos los vectores tangentes r_u y r_v. La ecuación vectorial es: $\vec{r}(u,v) = \langle u^2, v^2, u + 2v \rangle$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{k} = 2u\hat{i} + \hat{k} \qquad \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\hat{k} = 2v\hat{j} + 2\hat{k}$$

Y calculamos el vector normal al plano tangente:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\hat{i} - 4u\hat{j} + 4uv\hat{k} \quad ; \quad n = \langle -2, -4, 4 \rangle$$ ya que en el punto

$(1,1,3)$, u=v=1

Y el vector normal es: $n = \langle -2, -4, 4 \rangle$, y la ecuación del plano tangente es:

$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$ o simplificado es: $-x - 2y + 2z = 3$

AREA DE UNA SUPERFICIE. Tomamos una superficie con ecuación paramétrica $\vec{r}(u,y)v = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$ cuyo dominio paramétrico D es un rectángulo en el plano uv, el cual dividimos en subrectángulos R_{ij} de área $(\Delta u)(\Delta v)$.

La región S_{ij} de la superficie que corresponde a R_{ij} se llama "parcela" y tiene un área igual a: $\Delta S = \left|(\Delta u\, \vec{r}_u) \times (\Delta v\, \vec{r}_v)\right| = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| \Delta u\, \Delta v$, y por tanto: $dS = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\, dv$, y por tanto el área de la superficie en el dominio paramétrico D es:

$$A(S) = \iint_D dS = \iint_D \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| du\, dv = \iint_D \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| dA$$ en donde

$$\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\hat{k}$$

EJEMPLO 7: Determine el área de una esfera de radio a, con ecuaciones paramétricas: $x = a\,sen\phi\cos\theta$; $y = a\,sen\phi\,sen\theta$; $z = a\cos\phi$. Calculamos

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi sen\theta & -asen\phi \\ -asen\phi sen\theta & asen\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2sen^2\phi\cos\theta\hat{i} + a^2sen^2\phi sen\theta\hat{j} + a^2sen\phi\cos\phi\hat{k}$$

$$\left|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\right| = \sqrt{a^4sen^4\phi\cos^2\theta + a^4sen^4\phi sen^2\theta + a^4sen^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4sen^4\phi + a^4sen^2\phi\cos^2\phi} = a^2\sqrt{sen^2\phi} = a^2sen\phi$$

$$A = \iint_D \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| dA = \iint_D \left|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\right| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2sen\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sen\phi d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$

AREA DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Para el caso de una superficie con ecuación $z = f(x,y)$ y tomando "x" y "y" como parámetros, las ecuaciones paramétricas son: $x = x$; $y = y$; $z = f(x,y)$

Entonces: $\vec{r}_x = \hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\hat{k}$; $\vec{r}_y = \hat{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{k}$ y por tanto

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \hat{k} \quad \text{y}$$

$$dS = \left|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Y por tanto la fórmula del área se convierte en:

$$A=\iint_D \left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right| dA=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \quad ; \quad \underline{A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA}$$

Note la semejanza con la fórmula de la longitud de una curva: $\underline{L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$

<u>EJEMPLO 8</u>: Calcule al área de la parte del paraboloide $z=x^2+y^2$ debajo del plano $z=9$. $A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA=\iint_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dA$

$$A=\iint_D \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}\,dA=\iint_D \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$A=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr=2\pi\left(\frac{1}{8}\right)\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{3/2}\Big]_0^3=\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

<u>Para la próxima clase estudiar la sección:</u>
16.6 Superficies Paramétricas

<u>Tarea para la próxima clase:</u>
Tarea No. 28: Superficies Paramétricas

Ma-2009: MATEMÁTICAS PARA INGENIERÍA III **Tarea No. 28: Superficies Paramétricas** (Sección 16.6 del Stewart 8ª Edición)	
1	Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada: $\vec{r}(u,v)=(u+v)\hat{i}+(3-v)\hat{j}+(1+4u+5v)\hat{k}$
2	Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada: $\vec{r}(s,t)=\langle s\cos t, s\,sent, s\rangle$
3	Halle la representación paramétrica para la superficie: la parte del cilindro $y^2+z^2=16$ que está entre los planos $x=0$ y $x=5$
4	Halle la representación paramétrica para la superficie: la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=36$ que está entre los planos $z=0$ y $z=3\sqrt{3}$
5	Determine una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado. $x=u+v\,,\quad y=3u^2\,,\quad z=u-v\,,\quad (2,3,0)$
6	Determine una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado. $\vec{r}(u,v)=(u\cos v)\hat{i}+(usenv)\hat{j}+(v)\hat{k} \quad ; \quad u=1\,, v=\pi/3$
7	Encuentre el área de la superficie: la parte del plano: $x+2y+3z=1$ que está dentro del cilindro: $x^2+y^2=3$
8	Encuentre el área de la superficie: la parte del paraboloide $y=x^2+z^2$ que está dentro del cilindro $x^2+z^2=16$
Respuestas	
1	El plano que pasa por $(0,3,1)$ que contiene los vectores $\langle 1,0,4\rangle$ y $\langle 1,-1,5\rangle$

2	El cono circular con eje en el eje z		
3	$x = x\,,\quad y = 4\cos\theta\,,\quad z = 4sen\theta\,,\quad 0 \le x \le 5\,,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$		
4	$x = 6sen\phi\cos\theta\,,\quad y = 6sen\phi sen\theta\,,\quad z = 6\cos\phi\,,\quad \pi/6 \le \phi \le \pi/2,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$		
5	$3x - y + 3z = 3$	7	$\sqrt{14}\pi$
6	$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + z = \frac{\pi}{3}$	8	$(\pi/6)\left(65^{3/2} - 1\right)$