Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

Tema 6.7 : Integrales de Superficie

(Estudiar la Sección 16.7 en el Stewart 8ª Edición,; Hacer la Tarea No. 29)

Repaso de Integrales de línea: Fueron desarrolladas para resolver problemas de flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.

Se comienza con una curva C con ecuaciones paramétricas:

$x = x(t)$; $y = y(t)$; $a \le t \le b$ o su equivalente ecuación vectorial:

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$. Y ahora consideramos una función de dos variables $f(x, y)$ cuyo dominio incluye a la curva C.

Se define la integral de línea como: $\int_C f(x, y)\,ds$; $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ o

como: $\int_C f(x, y)\,ds = \int_C f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$; $ds = |\vec{r}\,'|\,dt$

Definición de Integral de Superficie. Fueron desarrolladas para resolver problemas de flujo de fluidos, y de líneas de fuerzas de electricidad y magnetismo. Comenzamos con una superficie S con ecuación vectorial:

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$ sobre un domino D , y una función de tres variables $f(x, y, z)$ cuyo domino incluye la región D.

Se define la integral de superficie como: $\iint_S f(x, y, z)\,dS$; $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dA$

o como: $\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_S f(\vec{r}(u,v))|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dA = \iint_S f(u,v)|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dudv$

Gráficas de funciones: Toda superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ puede considerarse una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas: $x = u$; $y = v$; $z = g(u,v)$, así que la ecuación vectorial de la superficie es: $\vec{r}(u,v) = \langle u, v, g(u,v)\rangle$, y dos vectores tangentes a la superficie son: $\vec{r}_u = \hat{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\hat{k}$; $\vec{r}_v = \hat{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\hat{k}$. Y el vector normal a la superficie es:

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}\hat{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\hat{j} + \hat{k}$ de donde tenemos que:

$\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}$ y por lo tanto tenemos que:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_S f(u,v,g(u,v))\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}\,dA$$

Y podemos formar un vector unitario perpendicular, o normal a la superficie:

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right|} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u}\hat{\imath} - \frac{\partial g}{\partial v}\hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}}$$

<u>EJEMPLO 1</u>: Calcule la integral de superficie $\iint_S x^2 dS$ en donde S es la esfera unitaria: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Empezamos con las ecuaciones paramétricas de la superficie: $x = sen\phi\cos\theta$; $y = sen\phi sen\theta$; $z = \cos\phi$ o con su ecuación vectorial: $\vec{r}(\theta,\phi) = sen\phi\cos\theta\hat{\imath} + sen\phi sen\theta\hat{\jmath} + \cos\phi\hat{k}$ y entonces calculamos que: $\left|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\right| = sen\phi$ y entonces tenemos que $\iint_S f(\vec{r}(u,v))\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| dA$ en este ejemplo es: $\iint_S x^2 dS = \iint_D (sen\phi\cos\theta)^2\left|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\right| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen^3\phi\cos^2\theta\, d\phi\, d\theta = \frac{4\pi}{3}$

<u>EJEMPLO 2</u>: Evalúe $\iint_S y\, dS$, donde S es la superficie $z = x + y^2$ con $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2$. **<u>Solución</u>**: Como $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ tenemos que:

$$\iint_S y\, dS = \iint_D y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{2 + 4y^2}\, dy\, dx = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

EJEMPLO 3: Evalúe la integral de superficie $\iint_S \left(y^2+2yz\right)dS$, donde S es la porción del plano $2x+y+2z=6$ que se encuentra en el primer octante.

Solución: $z=g(x,y)=\frac{1}{2}(6-2x-y)$; $g_x(x,y)=-1$; $g_y(x,y)=-\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+\left[g_x(x,y)\right]^2+\left[g_y(x,y)\right]^2}=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$\iint_S \left(y^2+2yz\right)dS=\iint_R f\left(x,y,g(x,y)\right)\sqrt{1+\left[g_x(x,y)\right]^2+\left[g_y(x,y)\right]^2}\,dA$$

$$=\iint_R \left[y^2+2y\left(\frac{1}{2}\right)(6-2x-y)\right]\left(\frac{3}{2}\right)dA=3\int_0^3\int_0^{2(3-x)} y(3-x)\,dy\,dx$$

$$=6\int_0^3 (3-x)^3\,dx=\left[-\frac{3}{2}(3-x)^4\right]_0^3=\frac{243}{2}$$

EJEMPLO 4: Calcule el flujo de agua que pasa por el cilindro parabólico S : $y=x^2$, $0\le x\le 2$, $0\le z\le 3$, si el vector de velocidad es: $\vec{F}=y\hat{i}+2\hat{j}+xz\vec{k}$

Solución: $x=u$, $z=v$, $\vec{r}(u,v)=\left\langle u,u^2,v\right\rangle$; $\vec{r}_u=\langle 1,2u,0\rangle$; $\vec{r}_v=\langle 0,0,1\rangle$

$$\vec{N}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\langle 2u,-1,0\rangle \quad ; \quad \vec{F}\bullet\vec{N}=\left\langle u^2,2,uv\right\rangle\bullet\langle 2u,-1,0\rangle=2u^3-2$$

$$\iint_S \vec{F}\bullet\hat{n}\,dA=\iint \vec{F}\bullet\vec{N}\,dudv=\int_0^3\int_0^2\left(2u^3-2\right)du\,dv=\int_0^3\left[\frac{u^4}{2}-2u\right]_0^2 dv=4\int_0^3 dv=12$$

INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES.

Suponga que S es una superficie con vector normal unitario $\hat{n}$, e imagine un fluido de densidad $\rho(x,y,z)$ $\left(kg/m^3\right)$ y campo de velocidad $\vec{v}(x,y,z)$ (m/s) que fluye a través de S. Entonces la razón de flujo (masa por unidad de tiempo), por unidad de área es $\rho\vec{v}$ (kg/m3)(m/seg). Si se divide S en pequeñas parcela S_{ij}, casi planas, la masa de fluido por unidad de tiempo que cruza Sij en la dirección normal $\hat{n}$ se puede aproximar como $(\rho\vec{v}\cdot\hat{n})A\left(S_{ij}\right)$. Al sumar estas cantidades y tomar el límite se obtiene la integral de superficie de la función $\rho\vec{v}\cdot\hat{n}$ en S:

$\iint\limits_S \rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS$ y se interpreta físicamente como la razón de flujo por S. Y si se escribe $\vec{F}=\rho\vec{v}$ entonces $\vec{F}$ también es un campo vectorial y la integral anterior se convierte en: $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$

DEFINICIÓN: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial definido en una superficie S con vector unitario n, entonces la integral de superficie de $\vec{F}$ en S es: $\underline{\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS}$

Esta integral se llama el "Flujo de $\vec{F}$ a través de S"

Recordando que el vector unitario $\hat{n}$ de una superficie S con ecuación vectorial $\vec{r}(u,v)$ se puede expresar como: $\hat{n}=\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|}$ entonces la integral de flujo se puede expresar como: $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|}dS=\iint\limits_S\left[\vec{F}\cdot\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|}\right]\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|dA$ y

finalmente tenemos que: $\underline{\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)dA}$

EJEMPLO 5. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = z\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solución: Ya habíamos visto que la ecuación vectorial de esa esfera era: $\vec{r}(\phi,\theta) = \sin\phi\cos\theta\hat{i} + \sin\phi\sin\theta\hat{j} + \cos\phi\hat{k}$, y entonces el campo es: $\vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\sin\theta\hat{j} + \sin\phi\cos\theta\hat{k}$ y de un ejemplo anterior teníamos que: $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \sin^2\phi\cos\theta\hat{i} + \sin^2\phi\sin\theta\hat{j} + \sin\phi\cos\phi\hat{k}$, Por tanto: $\vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) = \cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta$ y entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta\right)d\phi d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\, d\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi}\sin^3\phi\, d\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta =$$

$$= 0 + \int_0^{\pi}\sin^3\phi\, d\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}$$ por el mismo cálculo del ejemplo anterior.

En el caso de una superficie S dada por la ecuación $z = f(x,y)$, se puede concebir a $"x"$ y $"y"$ como parámetros y usar la ecuación: $\vec{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x,y)\hat{k}$,

de donde: $\vec{r}_x = \hat{i} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{k}$; $\vec{r}_y = \hat{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{k}$ y por tanto:

$$d\vec{S} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{F}\bullet d\vec{S} = (Pi + Qj + Rk)\bullet\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}\right) = -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R$$

$$\underline{\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S} = \iint_D\left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right)dA}$$

EJEMPLO 6: Evalúe $\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S}$, en donde $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ y S es la frontera de la región sólida E encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

Solución: S consta de una superficie parabólica superior S_1, y una superficie inferior S_2. Puesto que

$P(x,y,z) = y$; $Q(x,y,z) = x$; $R(x,y,z) = z = 1 - x^2 - y^2$ en S_1, y

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ se tiene que: $\iint_{S_1} \vec{F}\bullet d\vec{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dA$

$$= \iint_D \left[-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2 \right] dA = \iint_D \left(1 + 4xy - x^2 - y^2 \right) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 + 4r^2 \cos\theta \sin\theta - r^2 \right) r dr d\theta = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

El disco S_2 está orientado hacia abajo, así que su vector normal unitario $\hat{n} = -\hat{k}$ y se tiene: $\iint_{S_2} \vec{F}\bullet d\vec{S} = \iint_{S_2} F\bullet(-k)\, dS = \iint_{S_2} (-z)\, dA = \iint_{S_2} 0\, dA = 0$ ya que $z = 0$ y por

ultimo: $\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\bullet d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}\bullet d\vec{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

Para la próxima clase estudiar las secciones

16.7 Superficies Paramétricas

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 29 Superficies Paramétricas

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III **Tarea No 29 : Integrales de Superficie** (Sección 16.7 del Stewart 8ª Edición)	
	Evalúe la integral de superficie:
1	$\iint_S x^2yz\,dS$, S es la parte del plano $z=1+2x+3y$ que está sobre el rectángulo $[0,3]\times[0,2]$
2	$\iint_S z^2\,dS$, S es la parte del paraboloide; $x=y^2+z^2$ dada por $0\le x\le 1$
3	$\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$
Evalúe la integral de superficie $\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S}$ para el campo vectorial dado $\vec{F}$ y la superficie S. En otras palabras termine el flujo de $\vec{F}$ por S. Para las superficies cerradas, use la orientación positiva (hacia afuera).	
4	$\vec{F}(x,y,z)=xy\hat{i}+yz\hat{j}+zx\hat{k}$, S es la parte del paraboloide $z=4-x^2-y^2$ que está sobre el cuadrado $0\le x\le 1$; $0\le y\le 1$ y tiene orientación hacia arriba.
5	$\vec{F}(x,y,z)=y\hat{j}-z\hat{k}$, S consta del paraboloide $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$ y el disco $x^2+z^2\le 1$; $y=1$
6	$\vec{F}(x,y,z)=x\hat{i}-z\hat{j}+y\hat{k}$, S es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ en el primer octante, con orientación hacia el origen.
7	Un fluido tiene una densidad $870\,kg/m^3$ y fluye con velocidad $\vec{v}=z\hat{i}+y^2\hat{j}+x^2\hat{k}$, donde x,y,z se miden en metros y los componentes de v en metros por segundo. Determine la razón de flujo hacia afuera del cilindro $x^2+y^2=4$; $0\le z\le 1$

8	Use la Ley de Gauss $Q=\varepsilon_0 \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S}$ para determinar la carga contenida en el hemisferio sólido $x^2+y^2+z^2 \le a^2 \quad ; \quad z \ge 0$, si el campo eléctrico es: $\vec{E}(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+2z\hat{k}$

RESPUESTAS	
$R1: \quad 171\sqrt{14}$	$R5: \quad 0$
$R2: \quad (\pi/120)\left(25\sqrt{5}+1\right)$	$R6: \quad -\frac{4}{3}\pi$
$R3: \quad 16\pi$	$R7: \quad 0 \quad kg/s$
$R4: \quad \frac{713}{180}$	$R8: \quad \frac{8}{3}\pi a^3 \varepsilon_0$