

Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

Tema 6.8 : Teorema del Rotacional de Stokes

(Estudiar la Sección 16.8 en el Stewart 8ª Edición,; Hacer la Tarea No. 30)

El Teorema de Stokes puede considerarse una versión de tres dimensiones del Teorema de Green. Mientras que el Teorema de Green relaciona una integral doble en una región plana D con una integral de línea alrededor de la curva que la limita, el Teorema de Stokes relaciona una integral de superficie en una superficie S con una integral de línea alrededor de la curva que limita a S , que puede ser una curva en el espacio.

<p>Teorema de Green</p> $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{k} dA$	<p>Teorema de Stokes</p> $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{S}$
--	---

EJEMPLO 1: Verifique el Teorema de Stokes si S es el paraboloido:

$z = 9 - x^2 - y^2 \quad z \geq 0$, y el campo vectorial es:

$$\vec{F} = (2z - y)\hat{i} + (x + z)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$$

Solución a:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (2z - y) & (x + z) & (3x - 2y) \end{vmatrix} = (-2 - 1)\hat{i} + (2 - 3)\hat{j} + (1 - (-1))\hat{k}$$

$\text{rot } \vec{F} = \langle -3, -1, 2 \rangle$ y la ecuación vectorial de la curva frontera es:

$$\vec{r}(x, y, z) = \langle x, y, f(x, y) \rangle = \langle x, y, 9 - x^2 - y^2 \rangle \quad \text{por lo tanto}$$

$\vec{r}_x = \langle 1, 0, -2x \rangle$; $\vec{r}_y = \langle 0, 1, -2y \rangle$ y entonces el vector normal será:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \langle 2x, 2y, 1 \rangle \quad \text{y entonces}$$

$$I = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

$$I = \iint_D \langle -3, -1, 2 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle dx dy = \iint_D (-6x - 2y + 2) dx dy$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-6r \cos \theta - 2r \sin \theta + 2) r dr d\theta = 18\pi$$

Solución b: Ahora por el otro lado del teorema:

La ecuación vectorial de la curva frontera es $\vec{r}(t) = \langle x, y, z \rangle = \langle 3\cos t, 3\sin t, 0 \rangle$

Y entonces $\vec{r}'(t) = \langle -3\sin t, 3\cos t, 0 \rangle$ y el campo vectorial

$\vec{F} = \langle 2z - y, x + z, 3x - 2y \rangle$, sobre la curva C: $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$, en polares nos queda como: $\vec{F} = \langle -3\sin t, 3\cos t, 9\cos t - 6\sin t \rangle$ y por tanto:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{r}' dt = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \vec{r}' dt = \int_0^{2\pi} (9\sin^2 t + 9\cos^2 t) dt = 9(2\pi) = 18\pi$$

Que nos da el mismo resultado anterior.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = -y^2\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k}$, y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Solución: $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 1 + 2y \rangle$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) dA = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle dA$$

$$z = f(x, y) = 2 - y \quad ; \quad \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle = \langle 0, 1, 1 \rangle$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint \langle 0, 0, 1 + 2y \rangle \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle dA = \iint (1 + 2y) dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \sin \theta \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \pi$$

EJEMPLO 3: Use el Teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k}$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano xy .

Solución: Para hallar la frontera C se resuelven las dos ecuaciones, restándolas, y se obtiene $z^2 = 3$, o sea $z = \sqrt{3}$. Así que C es el círculo dado por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$; $z = \sqrt{3}$. Una ecuación vectorial es: $\vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + \sqrt{3} \hat{k}$, así que: $\vec{r}'(t) = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j}$ y también $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \hat{i} + \sqrt{3} \sin t \hat{j} + \cos t \sin t \hat{k}$

$$\text{Por lo tanto: } = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

EJEMPLO 4: Verifique el Teorema de Stokes si S es la parte del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$, sobre el plano xy , si $F(x, y, z) = 2z\hat{i} + x\hat{j} + y^2\hat{k}$

Solución a: Como integral de superficie: $\vec{N} = \left\langle \frac{-\partial f}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1 \right\rangle = \langle 2x, 2y, 1 \rangle$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 0)\hat{i} - (0 - 2)\hat{j} + (1 - 0)\hat{k} = \langle 2y, 2, 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iint_R \langle 2y, 2, 1 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle dA = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4xy + 4y + 1) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[2xy^2 + 2y^2 + y \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2} dx = 4\pi \end{aligned}$$

Solución b: Como integral de línea:

Parametrizamos la curva C . $\vec{r}(t) = 2 \cos t \hat{i} + 2 \sin t \hat{j} + 0 \hat{k}$

Y el campo es: $F(x, y, z) = 2z\hat{i} + x\hat{j} + y^2\hat{k}$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle 2z, x, y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \int_C 2z dx + x dy + y^2 dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (0 + 2 \cos t (2 \cos t) + 0) dt = 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left[t + \sin 2t/2 \right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

EJEMPLO 5: Evalúe $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ si $F = \langle -y^2, z, x \rangle$; $C: 2x + 2y + z = 6$

Solución:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = (0-1)\hat{i} - (1-0)\hat{j} + (0+2y)\hat{k} = \langle -1, -1, 2y \rangle$$

$$z = f(x, y) = 6 - 2x - 2y \quad ; \quad \vec{n} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle = \langle 2, 2, 1 \rangle$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint \langle -1, -1, 2y \rangle \cdot \langle 2, 2, 1 \rangle \, dx \, dy$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y - 4) \, dx \, dy = \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12) \, dy = \left[-2y^3/3 + 5y^2 - 12y \right]_0^3 = \underline{\underline{-9}}$$

EJEMPLO 6: Usando el teorema de Stokes evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si el campo vectorial es: $\vec{F}(x, y, z) = \langle 2y, 3z, x \rangle$ y C el triángulo con vértices $(2, 0, 0); (0, 2, 0); (0, 0, 2)$.

Solución: $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y & 3z & x \end{vmatrix} = \langle -3, -1, -2 \rangle$ y la ecuación del plano que

pasa por esos puntos es $C: x + y + z = 2$ y por tanto $z = g(x, y) = 2 - x - y$ y

entonces $\vec{n} = \langle -g_x, -g_y, 1 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$ y substituyendo tenemos que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_S \langle -3, -1, -2 \rangle \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle \, dA = \iint_S -6 \, dA$$

$$= -6 \int_0^2 \int_0^{2-x} dy \, dx = -6 \int_0^2 (2-x) \, dx = -6 \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = -6(4-2) = \underline{\underline{-12}}$$

EJEMPLO 7: Usando el teorema de Stokes evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si el campo vectorial

es: $\vec{F}(x, y, z) = \langle z^2, y, z \rangle$ y la curva C es $z = g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Solución: $rot \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & y & z \end{vmatrix} = \langle 0, 2z, 0 \rangle$

$$\vec{n} = \langle -g_x, -g_y, 1 \rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right\rangle$$

$$= \iint_S \frac{2yz}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA = \iint_S \frac{2y\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA = \iint_S 2y dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^3}{3} \right]_0^2 \sin \theta d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{16}{3} [-\cos \theta]_0^{2\pi} = \frac{16}{3} [-1 + 1] = \underline{\underline{0}}$$

EJEMPLO 8: Usando el teorema de Stokes evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si el campo vectorial

es: $\vec{F}(x, y, z) = \langle yz, 2xz, e^{xy} \rangle$ y la curva C es $x^2 + y^2 = 16$; $z = 5$

Solución: $rot \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} = \langle xe^{xy} - 2x, -ye^{xy} + y, z \rangle$

$$C: z = 5 \quad ; \quad z = g(x, y) = 5 \quad ; \quad \vec{n} = \langle -g_x, -g_y, 1 \rangle = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_S \langle xe^{xy} - 2x, -ye^{xy} + y, z \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle dA$$

$$= \iint_S z dA = \iint_S 5 dA = 5A = 5(\pi 4^2) = \underline{\underline{80\pi}}$$

EJEMPLO 9: Usando el teorema de Stokes evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si el campo vectorial es: $\vec{F}(x, y, z) = \langle 2y, xz, x + y \rangle$ y C es la curva de intersección del plano $z = y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:
$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y & xz & x + y \end{vmatrix} = \langle 1 - x, -1, z - 2 \rangle$$

$C: z = g(x, y) = y + 2 \quad ; \quad \vec{n} = \langle 0, -1, 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_S \langle 1 - x, -1, z - 2 \rangle \cdot \langle 0, -1, 1 \rangle \, dA \\ &= \iint_S (1 + z - 2) \, dA = \iint_S (y + 1) \, dx \, dy = \iint_S (r \sin \theta + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \theta + r) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta}{3} + \frac{1}{2} \right) \, d\theta \\ &= \left[\frac{-\cos \theta}{3} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \left[\left(\frac{-1}{3} + \pi \right) - \left(\frac{-1}{3} + 0 \right) \right] = \underline{\underline{\pi}} \end{aligned}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones

16.8 Teorema de Stokes

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 30 Teorema de Stokes

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 30 : Teorema de Stokes

(Sección 16.8 del Stewart 8ª Edición)

Use el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$

P1: $\vec{F}(x, y, z) = xyz\hat{i} + xy\hat{j} + x^2yz\hat{k}$, S , consta de la parte superior y los cuatro lados, (pero no de la base), del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, orientado hacia afuera.

$$R_1 : 0$$

Use el Teorema de Stokes para evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. En cada caso S está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba

P2: $F(x, y, z) = (x + y^2)\hat{i} + (y + z^2)\hat{j} + (z + x^2)\hat{k}$, C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

$$R_2 : -1$$

P3: $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$, C es la frontera de la parte del paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$ en el primer octante.

$$R_3 : -\frac{17}{20}$$

P4: Verifique que el Teorema de Stokes es cierto para el campo vectorial F y la superficie S dados.

$\vec{F}(x, y, z) = -2yz\hat{i} + y\hat{j} + 3x\hat{k}$, S es la parte del paraboloides $z = 5 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = 1$, orientado hacia arriba.

$$R_4 : 8\pi$$

P5: Una partícula se mueve a lo largo de segmentos de recta del origen a los puntos $(1, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 1)$ y de vuelta al origen bajo la influencia del campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = z^2\hat{i} + 2xy\hat{j} + 4y^2\hat{k}$. Halle el trabajo realizado.

$$R_5 : 3$$

P6: Si S es una esfera y \vec{F} satisface las hipótesis del Teorema de Stokes, demuestre que $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$

