

Unidad 6 : ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

Tema 6.9 : Teorema de la Divergencia de Gauss

(Estudiar la Sección 16.9 en el Stewart 8ª Edición,; Hacer la Tarea No. 31)

DEFINICIÓN: Sea Q una región sólida limitada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal \hat{n} dirigido hacia el exterior de Q . Si \vec{F} es un campo vectorial en Q , entonces:
$$\underbrace{\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} \, dV}$$

El lado izquierdo determina el flujo total de fluido a través de la superficie S por unidad de tiempo. El lado derecho mide este mismo flujo de fluido a través de S desde una perspectiva diferente, calculando el flujo de fluido hacia adentro (o afuera) del volumen V . Si $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ la región es una fuente, si $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ la región es un sumidero, y si $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ el fluido es incompresible.

EJEMPLO 1: Sea Q la región sólida limitada por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$, y sea $F = \langle x, y^2, z \rangle$. Hallar $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ donde S son las cuatro superficies de Q .

Solución: Como la región está limitada por cuatro superficies, se necesitan cuatro integrales de superficie para evaluarla, por eso:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 2y + 1 = 2 + 2y \quad ;$$

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2z + 2yz) \Big|_0^{6-2x-2y} \, dx \, dy = \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 (12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2) \Big|_0^{3-y} \, dy = \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3) \, dy \\ &= \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 = \frac{63}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2: Sea Q el sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$, y el plano xy . Hallar $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ donde S es la superficie de Q y

$$\vec{F} = \langle x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y \rangle.$$

Solución: $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} \, dV$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(x^2 + \sin z)}{\partial x} + \frac{\partial(xy + \cos z)}{\partial y} + \frac{\partial(e^y)}{\partial z} = 2x + x + 0 = 3x$$

$$= \iiint_Q 3x \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r\cos\theta} (3r \cos \theta) r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (18r^2 \cos \theta - 3r^3 \cos^2 \theta) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} (48 \cos \theta - 12 \cos^2 \theta) \, d\theta$$

$$= \left[48 \sin \theta - 6 \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} = -12\pi$$

EJEMPLO 3: Sea Q la región limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar el flujo dirigido hacia afuera del campo vectorial $\vec{F} = \langle 2x^3, 2y^3, 2z^3 \rangle$ a través de la esfera.

Solución: $\operatorname{div} \vec{F} = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 6(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_Q 6(x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

$$= 6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho = 6 \int_0^2 \int_0^\pi 2\pi \rho^4 \sin \phi \, d\phi \, d\rho$$

$$= 12\pi \int_0^2 2\rho^4 \, d\rho = 24\pi \left(\frac{32}{5} \right) = \frac{768\pi}{5}$$

EJEMPLO 4: Sea Q la región sólida entre el paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy . Compruebe el teorema de la divergencia para $\vec{F} = \langle 2z, x, y^2 \rangle$

Solución a: Tomamos S_1 como el círculo $x^2 + y^2 \leq 4; z = 0$ con normal $\vec{n}_1 = -\hat{k}$, y S_2 como $z = 4 - x^2 - y^2$ con normal $\vec{n}_2 = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle = \langle 2x, 2y, 1 \rangle$ y entonces:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_2 \, dS \\ &= \iint_R \langle 2z, x, y^2 \rangle \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle \, dA + \iint_R \langle 2z, x, y^2 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle \, dA \\ &= \iint_R -y^2 \, dA + \iint_R (4xz + 2xy + y^2) \, dA \\ &= -\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2 \, dx dy + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2) \, dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy) \, dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy) \, dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy) \, dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[8x^2 - x^4 - 2x^2 y^2 + x^2 y \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-2}^2 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Solución b: Por el otro lado: $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2) = 0 + 0 + 0 = 0$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_Q 0 \, dV = 0$$

EJEMPLO 5: Use el teorema de la divergencia y evalúe $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ donde S es la superficie cerrada del sólido acotado por las gráficas de $x = 4$ y $z = 9 - y^2$ y los planos de coordenadas. $\vec{F}(x, y, z) = \langle 4xy + z^2, 2x^2 + 6yz, 2xz \rangle$

Solución:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4xy + z^2 & 2x^2 + 6yz & 2xz \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - 6y) - \hat{j}(2z - 2z) + \hat{k}(2x - 4x)$$

$$\vec{G} = \text{rot } \vec{F} = \langle -6y, 0, -2x \rangle \quad ; \quad \text{div } \vec{G} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint \text{div}(\text{rot } \vec{F}) \, dV = \iiint \text{div } G \, dV = \iiint 0 \, dV = 0$$

En los siguientes tres ejercicios, use el teorema de la divergencia para evaluar el flujo $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ dirigido hacia el exterior del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

EJEMPLO 6: $\vec{F}(x, y, z) = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle \quad ; \quad S: x=0, x=a, y=0, y=a, z=0, z=a$

Solución: $\text{div } \vec{F} = 2x + 2y + 2z \quad ; \quad \text{Flujo} = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_Q \text{div } \vec{F} \, dV$

$$= \iiint (2x + 2y + 2z) \, dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (2x + 2y + 2z) \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left[2xz + 2yz + z^2 \right]_{z=0}^{z=a} \, dy \, dx = \int_0^a \int_0^a (2ax + 2ay + a^2) \, dx$$

$$= \int_0^a \left[2axy + ay^2 + a^2y \right]_{y=0}^{y=a} \, dx = \int_0^a (2a^2x + a^3 + a^3) \, dx = \int_0^a (2a^2x + 2a^3) \, dx$$

$$= \left[a^2x^2 + 2a^3x \right]_{x=0}^{x=a} = a^4 + 2a^4 = \underline{\underline{3a^4}}$$

EJEMPLO 7: $\vec{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle \quad ; \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Solución: $\text{div } \vec{F} = 3 \quad ; \quad \text{Flujo} = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_Q \text{div } \vec{F} \, dV = \iiint_Q 3 \, dV$

$$= 3 \iiint_Q \, dV = 3V = 3 \left(\frac{4}{3} \pi (3)^3 \right) = \underline{\underline{108\pi}}$$

EJEMPLO 8:

$\vec{F}(x, y, z) = \langle xe^z, ye^z, e^z \rangle \quad ; \quad S: z=4-y, z=0, x=0, x=6, y=0$

Solución: $\text{div } \vec{F} = 3e^z \quad ; \quad \text{Flujo} = \iiint_Q \text{div } \vec{F} \, dV = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{4-y} 3e^z \, dz \, dy \, dx$

$$= \int_0^6 \int_0^4 \left[3e^z \right]_{z=0}^{z=4-y} \, dy \, dx = 3 \int_0^6 \int_0^4 (3e^{4-y} - 3) \, dy \, dx = 3 \int_0^6 \int_0^4 (e^4 e^{-y} - 1) \, dy \, dx$$

$$= 3 \int_0^6 \left[-e^4 e^{-y} - y \right]_{y=0}^{y=4} dx = e \int_0^6 (-1 - 4 + e^4) dx = 3 \left[-5x + e^4 x \right]_0^6 = \underline{\underline{18(-5 + e^4)}}$$

EJEMPLO 9: Compruebe el teorema de la divergencia evaluando $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$

como una integral de superficie y como una integral triple, para:

$\vec{F}(x, y, z) = (2x - y)\hat{i} + (z - 2y)\hat{j} + z\hat{k}$, y S : la superficie acotada por el plano $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos de coordenadas.

Solución a: Como una integral triple:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= 2 - 2 + 1 = 1 \quad ; \quad \iiint \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint dV = \int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{6-x-2y} dz dx dy \\ &= \int_0^3 (18 + 2y^2 - 12y) dy = \left[18y + \frac{2y^3}{3} - 6y^2 \right]_{y=0}^{y=3} = 54 + 18 - 54 = \underline{\underline{18}} \end{aligned}$$

Solución b: Como cuatro integrales dobles en las superficies S_1, S_2, S_3, S_4

Superficie S_1 : $z = 6 - x - 2y$; $\vec{n} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle = \langle 1, 2, 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint \langle 2x - y, z - 2y, z \rangle \cdot \langle 1, 2, 1 \rangle dA = \iint (2x - y + 2z - 4y + z) dx dy \\ &= \iint (2x - 5y + 3(6 - x - 2y)) dx dy = \int_{y=0}^{y=3} \int_{x=0}^{x=6-2y} (18 - x - 11y) dx dy \\ &= \int_{y=0}^{y=3} \left[18x - \frac{x^2}{2} - 11xy \right]_{x=0}^{x=6-2y} dy = \int_0^3 (90 - 90y + 20y^2) dy \\ &= \left[90y - 90 \frac{y^2}{2} + 20 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=3} = 270 - 405 - 180 = \underline{\underline{45}} \end{aligned}$$

Superficie S_2 : el plano xy $z = 0$; $2x + 4y = 12$; $\vec{n} = -\hat{k} = \langle 0, 0, -1 \rangle$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint \langle 2x - y, -2y, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle dS = \iint 0 dS = \underline{\underline{0}}$$

Superficie S_3 : el plano xz $y = 0$; $\vec{n} = -\hat{j} = \langle 0, -1, 0 \rangle$

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint \langle 2x, z, z \rangle \cdot \langle 0, -1, 0 \rangle dA = \iint -z dA = - \int_0^6 \int_0^{6-x} z dz dx \\ &= - \int_0^6 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=6-x} dx = - \int_0^6 \frac{1}{2} (6-x)^2 dx = - \int_0^6 \left(18 - 6x + \frac{x^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$= - \left[18x - 3x^2 + \frac{x^3}{6} \right]_{x=0}^{x=6} = -(108 - 108 + 36) = \underline{\underline{-36}}$$

Superficie S_4 : el plano yz : $x=0$; $\vec{n} = -\hat{i}$; $\vec{n} = \langle -1, 0, 0 \rangle$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iint \langle -y, z - 2y, z \rangle \cdot \langle -1, 0, 0 \rangle \, dA = \iint y \, dA = \int_0^3 \int_0^{6-2y} y \, dz \, dy$$

$$\int_0^3 y(6-2y) \, dy = \int_0^3 (6y - 2y^2) \, dy = \left[3y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=3} = 27 - 18 = \underline{\underline{9}}$$

Y sumando los resultados de las integrales en las cuatro superficies tenemos que:
 $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 45 + 0 - 36 + 9 = 9 + 9 = \underline{\underline{18}}$ Que es igual al resultado obtenido con la integral triple.

Para la próxima clase estudiar las secciones

16.9 Teorema de la Divergencia de Gauss

Tarea para entregar la próxima clase

Tarea No. 31 Teorema de la Divergencia de Gauss

Ma-2009 : MATEMÁTICAS PARA INGENIERIA III

Tarea No 31 : Teorema de la Divergencia de Gauss

(Sección 16.9 del Stewart 8ª Edición)

Verifique el Teorema de la Divergencia evaluando $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ como un integral de superficie y como un integral triple

P1: $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y)\hat{i} + (z - 2y)\hat{j} + z\hat{k}$, y S es la superficie limitada por los planos $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos de coordenadas.

R1: 18

P2: $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + zy\hat{j} + 2z^2\hat{k}$ y S es la superficie limitada por $z = 1 - x^2 - y^2$ y por $z = 0$

R2: π

Utilice el Teorema de la Divergencia para evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ y hallar el flujo dirigido hacia el exterior a través de la superficie del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

P3: $\vec{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$
 $S: x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$

R3: $3a^4$

P4: $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$

R4: 108π

P5: $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y^2\hat{j} - z\hat{k}$; $S: x^2 + y^2 = 25, z = 0, z = 7$

R5: 0

P6: $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{i} + 4y\hat{j} + xz\hat{k}$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$

R6: $\frac{1024\pi}{3}$

