Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.5 : Ecuaciones Exactas

- Recordemos primero que cuando tenemos una función de dos variables $z = f(x, y)$, el diferencial total de la función está definido como: $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Si partimos entonces de la ecuación de las curvas de nivel de esa superficie: $f(x, y) = c$ tendremos que: $df = 0$, o sea tendremos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

- Una ED de 1er orden de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ldots (1)$

se llama ED Exacta, si existe una función $f(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \ldots (2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \ldots (3) \; .$$

En este caso la solución de la ED Exacta será entonces $f(x, y) = c$

- Debido a que: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = M_y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = N_x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

el criterio para determinar si la ED (1) es exacta es que :

$$\underline{\underline{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}} \quad \text{o que:} \quad \underline{\underline{M_y = N_x}}$$

- El método para resolver una ED Exacta consiste en determinar la función $f(x, y)$ integrando la ecuación (2) con respecto a x, agregando una función indeterminada $h(y)$ en lugar de la constante de integración, derivando la ecuación resultante con respecto a y, e igualando después esta última ecuación con $N(x, y)$ de acuerdo a la ecuación (3), y de esta última ecuación se determina la función desconocida $h(y)$. Una vez que se ha determinado la función $f(x, y)$ completamente se iguala a una constante c para llegar finalmente a la ecuación de las curvas nivel que son la solución de la ED Exacta. Este proceso se ilustra a continuación:

$$(2) \quad \ldots \quad f(x,y) = \int M(x,y)dx = P(x,y) + h(y)$$

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{dh}{dy} = N(x,y)$$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dy} = N - \frac{\partial P}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad h = \int \left[N - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dy$$

$$f(x,y) = P(x,y) + \int \left[N - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dy$$

$$P(x,y) + \int \left[N - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dy = c$$

$$\left(5x^4 - 6xy^4 + 2y^2\right) \cdot dx + \left(12y^2 + 4xy - 12x^2y^3\right) \cdot dy = 0$$

$$M(x,y) = 5x^4 - 6xy^4 + 2y^2 \quad \Rightarrow \quad M_y = -24xy^3 + 4y$$

$$N(x,y) = 12y^2 + 4xy - 12x^2y^3 \quad \Rightarrow \quad N_x = 4y - 24xy^3$$

$$f(x,y) = \int M \cdot dx = \int \left(5x^4 - 6xy^4 + 2y^2\right) \cdot dx$$

$$f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y^3 + 4xy + \frac{dh}{dy} = N(x,y)$$

$$-12x^2y^3 + 4xy + \frac{dh}{dy} = 12y^2 + 4xy - 12x^2y^3$$

$$\frac{dh}{dy} = 12y^2 \Rightarrow \quad h = \int 12y^2 dy \Rightarrow \quad h(y) = 4y^3$$

$$\therefore \quad f(x,y) = x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3$$

$$\therefore \quad x^5 - 3x^2y^4 + 2xy^2 + 4y^3 = c$$

Ejemplos para la clase:

$$E1:\quad \left(y^3 - y^2 senx - x\right)dx + \left(3xy^2 + 2y\cos x\right)dy = 0$$

$$E2:\quad \left(1 - 2x^2 - 2y\right)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$$

$$E3:\quad \left(y^2\cos x - 3x^2 y - 2x\right)dx + \left(2ysenx - x^3 + \ln y\right)dy = 0 \quad ; \quad y(0) = e$$

$$R1:\quad xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$$

$$R2:\quad y - 2x^2 y - y^2 - x^4 = c$$

$$R3:\quad y^2 senx - x^3 y - x^2 + y\ln y - y = 0$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

2.4 Zill	2.4 Nagle	Ecuaciones Exactas
2.4 Zill	2.5 Nagle	Factores de Integración

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 6 : Ecuaciones Exactas

Ma-841 : Ecuaciones Diferenciales

Tarea No 6: Ecuaciones Exactas

Determine si la ecuación dada es exacta, y si lo es resuélvala.

$$P1: \quad (2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$$

$$P2: \quad (x - y^3 + y^2 senx)dx = (3xy^2 + 2y\cos x)dy$$

$$P3: \quad \left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$$

$$P4: \quad (4t^3y - 15t^2 - y)dt + (t^4 + 3y^2 - t)dy = 0$$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:

$$P5: \quad (x+y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0 \quad ; \quad y(1) = 1$$

$$P6: \quad (4y + 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0 \quad ; \quad y(-1) = 2$$

En el siguiente problema determine el valor de k para que la ecuación sea exacta:

$$P7: \quad (y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

$$R1: \quad x^2y^2 - 3x + 4y = c$$

$$R2: \quad xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$$

$$R3: \quad x^3y^3 - \tan^{-1}(3x) = c$$

$$R4: \quad t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = c$$

$$R5: \quad \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$$

$$R6: \quad 4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$$

$$R7: \quad k = 10$$