Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.6 : Factores de Integración

- Partimos de una ED de la forma: $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$
  y verificamos que no es exacta: $M_y \neq N_x$

- Suponemos que existe un factor de integración $\mu(x)$ tal que al multiplicar la ED por este factor se hace exacta, esto es:

$$[\mu(x)M(x,y)]dx + [\mu(x)N(x,y)]dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)M(x,y)] = \mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)N(x,y)] = \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}$$

$$\mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{d\mu}{dx}$$

$$\mu M_y - \mu N_x = N\frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)\cdot dx$$

$$si\ se\ cumple\ que: \underline{\underline{\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)}} \quad entonces:$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x)\cdot dx \Rightarrow \quad \int\frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)\cdot dx$$

$$\Rightarrow \ln(\mu) = \int p(x)\cdot dx \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu(x) = e^{\int p(x)\cdot dx}}}$$

- Si suponemos ahora que existe un factor de integración $\mu(y)$, procediendo de forma semejante encontramos ahora que:

$$si: \quad \frac{N_x - M_y}{M} = p(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int p(y)dy}$$

- **Ejemplo:**

$$6xy \cdot dx + \left(4y + 9x^2\right) \cdot dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M = 6xy \quad &\Rightarrow \quad M_y = 6x \\ N = 4y + 9x^2 &\Rightarrow N_x = 18x \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow no\ es\ exacta$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{6x - 18x}{4y + 9x^2} = \frac{-12x}{4y + 9x^2} \neq p(x) \Rightarrow no\ existe\ \mu(x)$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{18x - 6x}{6xy} = \frac{12x}{6xy} = \frac{2}{y} = p(y) \Rightarrow si\ existe\ \mu(y)$$

$$\mu(y) = e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln(y)} = e^{\ln\left(y^2\right)} = y^2 \ \therefore \quad \mu(y) = y^2$$

- Para comprobar que el factor encontrado hace exacta a la ecuación original la multiplicamos por el factor y procedemos a resolverla:

$$\overbrace{\left(6xy^3\right)}^{M} \cdot dx + \overbrace{\left(4y^3 + 9x^2y^2\right)}^{N} \cdot dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 18xy^2 \\ N_x &= 18xy^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow ya\ es\ exacta$$

$$f(x,y) = \int 6xy^3 dx = 3x^2y^3 + h(y)$$

$$f(x,y) = \int \left(4y^3 + 9x^2y^2\right)dy = y^4 + 3x^2y^3 + g(x)$$

$$y\ la\ solución\ es: \quad y^4 + 3x^2y^3 = c$$

<table>
<tr>
<td colspan="2">

Ejemplos para la clase:

$E1: \quad (2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$

$E2: \quad (10 - 6y + e^{-3x})dx - 2dy = 0$

$E3: \quad xdx + (x^2 y + 4y)dy = 0$

$\quad y(4) = 0$

</td>
<td>

$R1: \quad x^2 y^2 + x^3 = c$

$R2: \quad -2ye^{3x} + \frac{10}{3}e^{3x} + x = c$

$R3: \quad e^{y^2}(x^2 + 4) = 20$

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Resumen de los factores de integración</td>
<td colspan="2">

$$si: \quad \frac{M_y - N_x}{N} = p(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

$$si: \quad \frac{N_x - M_y}{M} = p(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int p(y)dy}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Para la próxima clase estudiar las secciones:
2.4 Zill 2.5 Nagle Factores de Integración
2.3 Zill 2.3 Nagle Ecuaciones Lineales

Tarea para entregar la próxima clase:
Tarea No. 7 : Factores de Integración

</td>
</tr>
</table>

Ma-841 : Ecuaciones Diferenciales

Tarea No 7: Factores de Integración

(a) Compruebe que la ecuación dada no es exacta, (b) determine un factor de integración que dependa solo de “x” o solo de “y”, (c) multiplique la ecuación por el factor encontrado y compruebe que ya es exacta, y (d) resuelva esta nueva ecuación que ya es exacta

$$P1: \quad x^2 senx\, dx + xy\, dy = 0$$

$$P2: \quad \left(e^x + y^2\right)dx + \left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right)dy = 0$$

$$P3: \quad \left(2xy + y^4\right)dx + \left(3x^2 + 6xy^3\right)dy = 0$$

$$P4: \quad \left(6x^2y^2 - 4y^4\right)dx + \left(2x^3y - 4xy^3\right)dy = 0$$

$$P5: \quad \left(\frac{y}{x^2} + 2\right)dx + \frac{1}{x}\left(1 + \ln(xy)\right)dy = 0$$

$$P6: \quad y\left(1 + \ln(xy) + 2x\right)dx + \left(x - 2y^2\right)dy = 0$$

$$R1: \quad \mu = \frac{1}{x} \quad ; \quad 2senx - 2x\cos x + y^2 = c$$

$$R2: \quad \mu = \frac{1}{y} \quad ; \quad e^x + xy^2 - y^3 = cy$$

$$R3: \quad \mu = y^2 \quad ; \quad x^2y^3 + xy^6 = c$$

$$R4: \quad \mu = x^3 \quad ; \quad x^4y^2\left(x^2 - y^2\right) = c$$

$$R5: \quad \mu = x \quad ; \quad y\ln(xy) + x^2 = c$$

$$R6: \quad \mu = \frac{1}{y} \quad ; \quad x\ln(xy) - y^2 + x^2 = c$$