

Unidad 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.7 : Ecuaciones Lineales

- Recordemos la forma general de la ED Lineal de 1er orden:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{o también} \quad a_1(y) \frac{dx}{dy} + a_0(y)x = g(y)$$

- Dividiendo toda la ecuación entre el coeficiente a_1 de y' , y designando como

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)} \quad \text{obtenemos que:}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = h(x) \quad \text{o también} \quad \frac{dx}{dy} + P(y)x = h(y)$$

a esta última forma de la EDL de 1er orden le llamaremos la forma estándar.

- Veamos ahora que aún cuando esta ED no es exacta si tiene un factor de integración que la hace exacta:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y - h(x) = 0$$

$$\underbrace{[P(x)y - h(x)]dx}_{M(x,y)} + \underbrace{1}_{N(x,y)} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} M_y = P(x) \\ N_x = 0 \end{array} \right\} \text{no es exacta}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{P(x) - 0}{1} = P(x) = p(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

- Multipliquemos ahora la ED original por este factor de integración y procedamos a deducir una forma general para la solución de la ED Lineal de 1er orden:

$$e^{\int P(x) dx} [P(x)y - h(x)] dx + e^{\int P(x) dx} dy = 0$$

$$ye^{\int P(x) dx} P(x) dx - h(x)e^{\int P(x) dx} dx + e^{\int P(x) dx} dy = 0$$

$$ye^{\int P(x) dx} P(x) dx + e^{\int P(x) dx} dy = h(x)e^{\int P(x) dx} dx$$

$$d \left[ye^{\int P(x) dx} \right] = h(x)e^{\int P(x) dx} dx$$

$$\int d \left[y e^{\int P(x) dx} \right] = \int h(x) e^{\int P(x) dx} dx$$

$$y e^{\int P(x) dx} = \int h(x) e^{\int P(x) dx} dx + c$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int h(x) e^{\int P(x) dx} dx + c \right] \quad \text{o abreviando:}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad y \text{ adem\u00e1s} \quad y = \frac{1}{\mu} \left[\int \mu \cdot h \cdot dx + c \right]$$

• **Ejemplo:**

$$(x+1) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x+2}{x+1} \right) y = \frac{2xe^{-x}}{x+1}$$

$$\mu = e^{\int \left(\frac{x+2}{x+1} \right) dx} = e^{\int \left[1 + \frac{1}{x+1} \right] dx} = e^{[x + \ln(x+1)]} = e^x \cdot e^{\ln(x+1)} = (x+1)e^x$$

$$y = \frac{1}{(x+1)e^x} \left[\int (x+1)e^x \cdot \frac{2xe^{-x}}{x+1} \cdot dx + c \right]$$

$$y = \frac{1}{(x+1)e^x} \left[\int 2x \cdot dx + c \right] \Rightarrow y = \frac{x^2 + c}{(x+1)e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = h(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

$$y = \frac{1}{\mu} \left[\int \mu \cdot h \cdot dx + c \right]$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = h(y)$$

$$\mu(y) = e^{\int P(y) dy}$$

$$x = \frac{1}{\mu} \left[\int \mu \cdot h \cdot dy + c \right]$$

Ejemplos para la clase:

$$E1: (x + 4y^2)dy + 2ydx = 0$$

$$E2: x^2 y' + x(x + 2)y = e^x$$

$$E3: ydx + (x + 2xy^2 - 2y)dy = 0$$

$$E4: (x + 2)^2 \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$$

$$R1: x = -\frac{4}{5}y^2 + cy^{-1/2}$$

$$R2: y = \frac{1}{2x^2}e^x + \frac{c}{x^2}e^{-x}$$

$$R3: x = \frac{1}{y} + \frac{c}{y}e^{-y^2}$$

$$R4: y = \frac{5}{3(x + 2)} + \frac{c}{(x + 2)^4}$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

2.3 Zill 2.3 Nagle Ecuaciones Lineales

2.5 Zill 2.6 Nagle Método de Sustitución

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 8 : Ecuaciones Lineales

Ma-841 : Ecuaciones Diferenciales

Tarea No 8 : Ecuaciones Lineales

Determine la solución general de la ecuación diferencial lineal dada:

$$P1: \frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

$$P2: y' + 3x^2y = x^2$$

$$P3: x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$$

$$P4: ydx - 4(x + y^6)dy = 0$$

$$P5: (x+1) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

$$R1: y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$$

$$R2: y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$$

$$R3: y = cx - x \cos x$$

$$R4: x = 2y^6 + cy^4$$

$$R5: y = \frac{x^2 + c}{(x+1)e^x}$$

Resuelva los problemas de valor inicial siguientes:

$$P6: xy' + y = e^x \quad ; \quad y(1) = 2$$

$$P7: (x+1) \frac{dy}{dx} + y = \ln x$$

$$y(1) = 10$$

$$R6: y = \frac{e^x + 2 - e}{x}$$

$$R7: y = \frac{x \ln x - x + 21}{x+1}$$