Unidad 1 : Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.8 : Método de Sustitución

- **Polinomio Homogéneo:**
  Cuando todos los términos de un polinomio p(x,y) son del mismo grado "n", se le llama polinomio homogéneo de grado "n".

- **Ejemplos:**

$$p(x,y) = 3xy^5 - 2x^3y^3 + 4x^4y^2 \Rightarrow \quad \textit{polinomio homogéneo de grado } 6$$

$$q(x,y) = 5x^2y^3 + 4xy^7 + 8x^5y^6 \Rightarrow \quad \textit{polinomio no homogéneo}$$

- Cuando las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ de la Ecuación Diferencial de 1er orden: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ son ambas polinomios homogéneos del mismo grado "n", la ED se llama ED Homogénea de grado"n".

- Las ED's Homogéneas de grado "n" siempre se pueden reducir a ED's de variables separables, utilizando cualquiera de las dos sustituciones, o cambios de variable, siguientes:

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$u = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x = uy \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$$

- Para mostrar la validez del enunciado anterior veamos lo siguiente:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{F(v) - v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-N(x,y)}{M(x,y)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = G(x,y)$$

$$u + y\frac{du}{dy} = G(u)$$

$$\frac{du}{G(u) - u} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{du}{G(u) - u} = \int \frac{dy}{y}$$

- **Ejemplo:**

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

$$v = \frac{y}{x} \quad ; \quad y = vx \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{vx^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(1 + v^2)}{x^2(v - 1)}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v - 1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v - 1} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - v^2 + v}{v - 1}$$

$$\frac{v - 1}{v + 1}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{v - 1}{v + 1}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left[1 - \frac{2}{v + 1}\right]dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$v - 2\ln(v + 1) = \ln(x) + c_1$$

$$\frac{y}{x} = 2\ln\left(\frac{y}{x} + 1\right) + \ln(x) + c_1$$

$$\frac{y}{x} = \ln\left(\frac{x + y}{x}\right)^2 + \ln(x) + c_1$$

$$\frac{y}{x} + c_2 = \ln\left[\frac{(x + y)^2}{x}\right]$$

$$c_3e^{\frac{y}{x}} = \frac{(x + y)^2}{x}$$

$$(x + y)^2 = c_3xe^{\frac{y}{x}}$$

Ejemplos para la clase:

$$E1: \quad (y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$$

$$E2: \quad -ydx + \left(x + \sqrt{xy}\right)dy = 0$$

$$E3: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

$$R1: \quad x + y\ln x = cy$$

$$R2: \quad 4x = y(\ln y - c)^2$$

$$R3: \quad \ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

<u>Para la próxima clase estudiar las secciones:</u>

2.5 Zill	2.6 Nagle	Método de Sustitución
3.1 Zill	3.1 al 3.4 Nagle	Problemas de Aplicaciones de 1er orden

<u>Tarea para entregar la próxima clase:</u>

Tarea No. 9 : Método de Sustitución

Ma-841 Ecuaciones Diferenciales

Tarea No. 9 : Método de Sustitución

Resuelva las ecuaciones homogéneas dadas con la sustitución adecuada:	Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:
$P1: \quad (x-y)dx + xdy = 0$ $P2: \quad xdx + (y-2x)dy = 0$ $P3: \quad (y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$ $P4: \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$ $P5: \quad -ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$	$P6: \quad xy^2 \dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \quad ; \quad y(1) = 2$ $P7: \quad (x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0 \quad ; \quad y(1) = 0$

Respuestas:

$R1: \quad x\ln x + y = cx$ $R2: \quad (x-y)\ln(x-y) = y + c(x-y)$ $R3: \quad x + y\ln x = cy$ $R4: \quad \ln(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = c$ $R5: \quad 4x = y(\ln y - c)^2$	$R6: \quad y^3 + 3x^3 \ln x = 8x^3$ $R7: \quad \ln x = e^{y/x} - 1$