Unidad 1 : Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tema 1.9 : Método de Variación de Parámetros

El Método de Variación de Parámetros se utiliza tres veces en este curso: a) para deducir la solución general de la ED Lineal de Primer Orden, b) para deducir la Fórmula de la Segunda Solución de las EDL de 2º orden, y c) para deducir la fórmula de la solución particular de la EDL de 2º orden

La Ecuación que queremos resolver es la EDL de 1er orden:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=h(x) \quad \cdots \quad (1)$$

Empezamos resolviendo primero la Ecuación Homogénea Asociada:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \quad \cdots \quad (2)$$

como se muestra a continuación:

$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y$$

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

$$\ln(y)=-\int P(x)dx+c_0$$

$$y_h=c_1e^{-\int P(x)dx}=c_1v(x)\cdots(3)$$

A esta solución de la EDL Homogénea Asociada se le representa como:

$$v(x)=e^{-\int P(x)dx} \quad \cdots \quad (4)$$

y satisface la EDLH Asociada (2), esto es:

$$v'+P(x)v=0 \quad \cdots \quad (5)$$

Ahora regresamos a resolver la EDL original (1) suponiendo que su solución se puede encontrar variando el parámetro c_1 que multiplica a v(x) en la Ec. (3), reemplazán-dola por una función desconocida u(x), esto es, suponemos que:

$$y(x)=v(x)u(x) \quad \cdots \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (1) tenemos que:

$$\underbrace{(uv'+u'v)}_{y'}+P(x)\underbrace{(uv)}_{y}=h(x)$$

$$u\underbrace{[v'+P(x)v]}_{0}+u'v=h(x)$$

$$u'v=h(x)$$

$$\frac{du}{dx}v(x)=h(x)$$

$$u=\int\frac{h(x)}{v(x)}dx+c \quad \cdots \quad (7)$$

Y sustituyendo (6) en (5) tenemos:

$$y=v(x)\left[\int\frac{h(x)}{v(x)}dx+C\right] \quad \cdots \quad (8)$$

que es equivalente a la fórmula:

$$y=\frac{1}{\underbrace{\mu(x)}_{v(x)}}\left[\underbrace{\int\mu(x)h(x)dx+C}_{u(x)}\right] \quad \cdots \quad (9)$$