

Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.3: Fórmula para la Segunda Solución

Deducción de la fórmula para encontrar la segunda solución de una ED Lineal de 2o orden cuando se conoce la primera solución, utilizando el Método de Variación de Parámetros.

La forma estándar de la ED Lineal Homogénea con la que vamos a trabajar es:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad , \quad (1)$$

Suponemos que $y_1(x)$ es una solución conocida de la ED(1), y que $P(x)$, $Q(x)$, y $y_1(x)$ son continuas en un intervalo I , de modo que $y_1(x)$ satisface la ED(1), esto es:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \quad , \quad (2)$$

Suponemos ahora que podemos obtener una segunda solución de la ED(1) a partir de la ecuación $y = c_1 y_1(x)$, si hacemos variable el parámetro c_1 , esto es suponemos que la segunda solución tendrá la forma:

$$y_2 = u(x)y_1(x) \quad , \quad (3)$$

en donde la función $u(x)$ ha sustituido al parámetro c_1 . Para determinar la función desconocida $u(x)$ sustituimos la ecuación (3) en la (1). Calculamos primero sus dos primeras derivadas:

$$y = uy_1 \quad ; \quad y' = uy_1' + y_1u' \quad ; \quad y'' = uy_1'' + 2u'y_1' + y_1u''$$

y después sustituimos en la ED(1) y agrupamos los términos que tienen a u de factor común obteniendo:

$$u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

el primer paréntesis es igual a cero por la ecuación (2), y el resto de la ecuación anterior lo dividimos por y_1 , obteniendo:

$$u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P \right) u' = 0$$

debido a que esta última ecuación no contiene la variable u explícitamente, la podemos reducir de orden con el cambio de variable: $w = u'$; $w' = u''$, obteniendo la ED de 1er orden:

$$w' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P \right) w = 0$$

la cual podemos escribir, dividiendo entre w y multiplicando por dx , como:

$$\frac{dw}{w} + \left(\frac{2y_1' dx}{y_1} + P \right) dx = 0$$

reconociendo que: $y_1' = \frac{dy_1}{dx}$; entonces $y_1' dx = dy_1$, y obtenemos que:

$$\frac{dw}{w} + 2 \frac{dy_1}{y_1} = -P dx$$

la cual podemos integrar, término a término, obteniendo:

$$\ln(w) + 2 \ln(y_1) = -\int P(x) dx$$

$$\ln(w y_1^2) = -\int P(x) dx$$

$$w y_1^2 = e^{-\int P(x) dx}$$

$$w = u' = \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2}$$

$$u = \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$y_2 = u y_1$$

Obteniendo finalmente la fórmula para la segunda solución

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Ejemplos para la clase:

$$E1: 9y'' - 12y' + 4y = 0 \quad ; \quad y_1 = e^{2x/3}$$

$$E2: x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0 \quad ; \quad y_1 = x^4$$

$$E3: x^2 y'' - xy' + 2y = 0 \quad ; \quad y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$$

$$E4: x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad ; \quad y_1 = x^3 \ln x$$

$$R1: y_2 = x e^{2x/3}$$

$$R2: y_2 = x^4 \ln x$$

$$R3: y_2 = x \cos(\ln x)$$

$$R4: y_2 = x^3$$

Para la próxima clase estudiar las secciones:

4.2 Zill 4.4 Nagle Fórmula de la Segunda Solución

4.3 Zill 4.5 y 4.6 Nagle ED Lineales Homogéneas de Coeficientes Ctes

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 13 : Fórmula de la Segunda Solución

Ma-841 : ECUACIONES DIFERENCIALES

Tarea No. 13 : Fórmula de la Segunda Solución

Encuentre una segunda solución y_2 a partir de la ED dada y de una solución conocida y_1

	Ejercicio	Respuesta
1	$y'' + 16y = 0; \quad y_1 = \cos(4x)$	$y_2 = \text{sen}(4x)$
2	$9y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x/3}$	$y_2 = xe^{2x/3}$
3	$4x^2 y'' + y = 0; \quad y_1 = x^{1/2} \ln x$	$y_2 = x^{1/2}$
4	$x^2 y'' - xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x \text{sen}(\ln x)$	$y_2 = x \cos(\ln x)$
5	$(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1 = e^{-2x}$	$y_2 = x$
6	$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0; \quad y_1 = x^3 \ln x$	$y_2 = x^3$