Unidad 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Tema 2.4: EDL Homogéneas con Coeficientes Constantes (EDLHCC)

Primera Parte: EDLHCC de 2o Orden.

- La forma general para la EDLHCC de 2o orden es: $ay'' + by' + cy = 0$
  La forma estándar para la EDLHCC de 2o orden es: $y'' + Py' + Qy = 0$;

comparando ambas ecuaciones vemos que: $P = \frac{b}{a}$

- Para resolver esta ED suponemos que la solución es una función de la forma $y = e^{mx}$ y procedemos a sustituirla en la ED para determinar los posibles valores del parámetro m que la satisfacen:

$$y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad y' = me^{mx} \quad \Rightarrow \quad y'' = m^2 e^{mx}$$

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

$$y \text{ como } e^{mx} \neq 0 \text{ para toda } x \in \Re$$

$$\underline{\underline{am^2 + bm + c = 0}} \text{ Ecuación Auxiliar o Característica}$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Caso I: Raíces Reales Diferentes (RRD)**

En el caso que $b^2 - 4ac > 0$ tendremos dos raíces reales diferentes $m_1 \, y \, m_2$, y tendremos por tanto dos funciones que satisfacen la ED: $y_1 = e^{m_1 x}$; $y_2 = e^{m_2 x}$ y la solución general $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de la EDLHCC en este Caso I será:

$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad ; \quad Caso\ I \quad ; \quad RRD}}$$

- **Caso II: Raíces Reales Repetidas (RRR)**

En el caso que $b^2 - 4ac = 0$ tendremos dos raíces reales repetidas, esto es, tendremos que: $m_1 = m_2 = m = \dfrac{-b}{2a}$ y obtenemos solamente una solución $y_1 = e^{mx}$

En este caso utilizamos la fórmula para la segunda solución para obtener la otra solución que necesitamos para obtener la solución general:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^{\,2}} dx = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{e^{2mx}} dx = y_1 \int e^{-\frac{b}{a}x} e^{-2mx} dx = y_1 \int e^{-\left(\frac{b}{a}+2m\right)x} dx$$

$$y\ como\ m = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2ma = -b \Rightarrow 2m + \frac{b}{a} = 0 \therefore$$

$$y_2 = y_1 \int e^{-\left(\frac{b}{a}+2m\right)x} dx = y_1 \int e^0 dx = y_1 \int dx = y_1 x \Rightarrow y_2 = x y_1(x) = x e^{mx}$$

$$y\ como\ y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad tenemos\ finalmente\ que:$$

$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \quad ; \quad Caso\ II \quad ; \quad RRR}}$$

Ejemplo 1:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$
$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$
$$m = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 3 \end{cases}$$
$$(m-2)(m-3) = 0$$
$$m_1 = 2\ ,\ m_2 = 3$$
$$y_1 = e^{2x}\ ; \quad y_2 = e^{3x}$$
$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}}$$

Ejemplo 2:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$
$$m^2 - 6m + 9 = 0$$
$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$$
$$m = \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 3 \end{cases}$$
$$(m-3)(m-3) = 0$$
$$m_1 = m_2 = m = 3$$
$$y_1 = e^{3x}\ ; \quad y_2 = x e^{3x}$$
$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}}$$

Ejemplo 3:

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$
$$m^2 - 4m + 13 = 0$$
$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2}$$
$$m = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$
$$m = \frac{4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} m_1 = \overbrace{2}^{\alpha} + \overbrace{3}^{\beta} i \\ m_2 = 2 - 3i \end{cases}$$
$$y_1 = e^{2x} \cos 3x$$
$$y_2 = e^{2x} sen 3x$$
$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$\underline{\underline{y_h = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} sen 3x}}$$

- **Caso III: Raíces Complejas Conjugadas (RCC)**

En el caso que $b^2 - 4ac < 0$ tenemos raíces complejas conjugadas:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\left(4ac - b^2\right)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} =$$

$$m = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i \Rightarrow en\ \ forma\ abreviada: \quad \underline{\underline{m = \alpha \pm i\beta}}$$

$$y\ utilizando\ la\ \ fórmula\ de\ Euler: \quad e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm isen\theta$$

$$tenemos\ que\ la\ solución\ general\ será:$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left[c_1\left(\cos\beta x + isen\beta x\right) + c_2\left(\cos\beta x - isen\beta x\right)\right]$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[\left(c_1 + c_2\right)\cos\beta x + i\left(c_1 - c_2\right)sen\beta x\right]$$

$$de\ este\ conjunto\ de\ soluciones\ complejas\ \ podemos$$

$$seleccionar\ un\ subconjunto\ de\ \ funciones\ reales\ tomando:$$

$$c_1 = a + ib\ ;\ c_2 = a - ib \Rightarrow c_1 + c_2 = 2a\ ;\ i\left(c_1 - c_2\right) = 2b$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[2a\cos\beta x + 2bsen\beta x\right];\ c_3 = 2a\ ;\ c_4 = 2b$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[c_3\cos\beta x + c_4 sen\beta x\right];\ c_3 \to c_1\ ;\ c_4 \to c_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_h = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} sen\beta x \quad ; \quad Caso\ III \quad ; \quad RCC}}$$

$$por\ lo\ que\ en\ este\ caso: \underline{y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x}\ ;\ \underline{y_2 = e^{\alpha x} sen\beta x}$$

Ejemplos para la clase:

$E1: \quad y'' - y' - 6y = 0$

$E2: \quad y'' + 8y' + 16y = 0$

$E3: \quad y'' - 4y' + 5y = 0$

$E4: \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$E5: \quad y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

$R1: \quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$

$R2: \quad y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

$R3: \quad y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x} senx$

$R4: \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$

$$R5: \quad y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_4 e^{-x/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

Mas ejemplos para la clase:

$E6: \quad 16y^{(4)} + 24y'' + 9y = 0$

$E7: \quad y^{(5)} - 16y' = 0$

$E8: \quad y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$

$E9: \quad y''' - 8y = 0\,;$

$y(0) = 0\,;\; y'(0) = -1\,;\; y''(0) = 0$

$$R6: \quad y = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 x \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 x sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$R7: \quad y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 \cos 2x + c_5 sen 2x$$

$$R8: \quad y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + c_5 e^{-5x}$$

$$R9: \quad y = \frac{-1}{6}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}\cos\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}e^{2x} sen\sqrt{3}x$$

También se podría ver si sobra tiempo:

- Algunos ejemplos al revés: encontrar la ED partiendo de la solución
- Construir algunos Operadores Anuladores

Para la próxima clase estudiar las secciones:

4.3 Zill	4.5 y 4.6	Nagle	ED Lineales Homogéneas de Coeficientes Ctes
4.4 Zill	4.8 y 6.3	Nagle	Método de Coeficientes Indeterminados

Tarea para entregar la próxima clase:

Tarea No. 14 : ED Lineales Homogéneas de Coeficientes Ctes

Ma-841 : ECUACIONES DIFERENCIALES

Tarea No. 14 : Ecuaciones Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones:

$P1: \quad 4y'' + y' = 0$ $P2: \quad 12y'' - 5y' - 2y = 0$ $P3: \quad y'' + 9y = 0$ $P4: \quad 3y'' + 2y' + y = 0$ $P5: \quad y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$ $P6: \quad 16y^{(4)} + 24y'' + 9y = 0$	$R1: \quad y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$ $R2: \quad y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{-x/4}$ $R3: \quad y = c_1 \cos 3x + c_2 sen 3x$ $R4: \quad y = e^{-x/3}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)\right)$ $R5: \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$ $R6: \quad y = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$ $c_3 x \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 x sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Determine la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$P7: \quad y'' + 16y = 0 \quad ;$ $y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0) = -2$ $P8: \quad y''' + 12y'' + 36y' = 0 \quad ;$ $y(0) = 0 \; ; \quad y'(0) = 1 \; ; \quad y''(0) = -7$	$R7: \quad y = 2\cos 4x - \frac{1}{2} sen 4x$ $R8: \quad y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}$

EDLHCC : Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes			
Ecuación Diferencial: $ay'' + by' + cy = 0$		**Ecuación Auxiliar:** $am^2 + bm + c = 0$	
Caso I	**Raíces Reales Diferentes** $b^2 - 4ac > 0$ $m_1 \neq m_2$	$y_1 = e^{m_1 x}$ $y_2 = e^{m_2 x}$	$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
Caso II	**Raíces Reales Repetidas** $b^2 - 4ac = 0$ $m_1 = m_2 = m$	$y_1 = e^{mx}$ $y_2 = xe^{mx}$	$y_h = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$
Caso III	**Raíces Complejas Conjugadas** $b^2 - 4ac < 0$ $m = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} sen \beta x$	$y_h = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} sen \beta x$